

Pripreme 21. i 28. novembar 2015 – osnovna škola

Zadatak 1 – Euklidsko dijeljenje

Ako su a i b cijeli brojevi, $b \neq 0$, tada postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r , $0 \leq r < |b|$ takvi da je $a = bq + r$. Napiši program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa odgovarajuće brojeve q i r .

Rješenje: Iskoristiti operatore dijeljenja ($/$) i modula ($\%$). U slučaju kada je $b < 0$, potrebno je promijeniti rezultate a/b i $a\%b$ tako da se dobije nenegativan ostatak.

Zadatak 2 – Djelioci broja

Napiši program koji učitava prirodan broj n i štampa sve njegove djelioce.

Rješenje: Prvo rješenje je da u petlji isprobamo sve brojeve i od 1 do n i ako je n djeljivo sa i štampamo broj i .

Drugo rješenje je da iskoristimo činjenicu da, osim samog broja n , ne postoji djelilac broja n koji je veći od $n/2$. U petlji isprobamo sve brojeve i od 1 do $n/2$ i ako je n djeljivo sa i štampamo broj i .

Poslije izvršavanja petlje štampamo broj n ,

Treće rješenje se bazira na činjenici da ako je $n = p \cdot q$ i ako je $p \leq q$, tada važi $p^2 \leq n$. Sada u petlji možemo ispitivati svaki broj p od 1 do n takav da je $p^2 \leq n$, i ako je n djeljivo sa p možemo štampati dva djelioca broja n : p i n/p . Jedino u slučaju kada je $p^2 = n$, treba štampati samo jednom djelilac p .

Zadatak 3 – Broj djelilaca

Napiši program koji učitava prirodan broj n i štampa broj njegovih djelilaca.

Zadatak 4 – Zbir djelilaca

Napiši program koji učitava prirodan broj n i štampa zbir njegovih djelilaca.

Rješenje: Zadaci 3 i 4 imaju rješenje slično zadatku 2, samo se umjesto štampanja vrši prebrojavanje (zadatak 3) ili sabiranje (zadatak 4) djelilaca broja n .

Zadatak 5 – NZD

Napiši program koji učitava prirodne brojeve a i b i štampa njihov najveći zajednički djelilac.

Rješenje: Prvi način rješavanja je da se prvo ispita da ako je a djeljivo sa b , tada je $\text{NZD}(a,b) = b$.

Ako nije, tada se u petlji ispituju potencijalni djelioc d broja b , počevši od $b/2$ ka 1. prvo d na koje naiđemo da idjeli i a je $\text{NZD}(a,b)$.

Drugo rješenje koristi Eulidov algoritam za NZD. Euklidov algoritam se zasniva na sljedećoj činjenici: ako je $b = 0$, tada je $\text{NZD}(a,b) = a$, a ako je $b \neq 0$, tada je $\text{NZD}(a,b) = \text{NZD}(b, a\%b)$. Sada u petlji, koja se izvršava sve dok je $b \neq 0$, izračunavamo $a\%b$ i par brojeva (a,b) zamjenjujemo parom $(b, a\%b)$. Po izlasku iz petlje, odgovor je trenutna vrijednost broja a .

Zadatak 6 – Pravougaonici

Pravougaono parče papira dimenzija $a \times b$ kvadratića, a i b prirodno brojevi, treba bez ostatka podijeliti na jednake kvadrate najveće moguće stranice. Napiši program koji učitava prirodne brojeve a i b i štampa dva broja: dužinu stranice kvadrata i broj dobijenih kvadrata.

Rješenje: Dužina stranice kvadrata je $d = \text{NZD}(a,b)$.

Zadatak 7 – Duž

Data je tačka (a,b) u koordinatnoj ravni, gdje su a i b cijeli brojevi. Napiši program koji učitava cijele brojeve a i b i štampa koliko tačaka čije su obje koordinate cijeli brojevi pripada duži koja spaja koordinatni početak sa tačkom A .

Rješenje: Traženi broj je $1 + \text{NZD}(a,b)$, ako su a i b pozitivni, Ako nisu, iskoristiti apsolutnu vrijednost broja.

Zadatak 8 – Prosti brojevi

Prirodan broj $n > 1$ je prost ako u jedini njegovu djelioci 1 i n . Napiši program koji učitava prirodan broj $n > 1$ i štampa poruku „Prost“ ako je broj prost ili „Slozen“ ako broj nije prost.

Rješenje: Možemo koristiti zadatak Broj djelilaca. Ako je broj djelilaca jednak 2, broj je prost. Za broj djelilaca koristimo bilo koji od ranije navedenih algoritama (pogledati rješenje zadatka 2), pa broj koraka može biti n , $n/2$ ili \sqrt{n} .

Drugo rješenje je da u petlji provjeravamo moguće djelioce broja n , počevši od 2, pa kada nađemo na prvi djelilac, prekidamo petlju, jer znamo da broj nije prost. Petlja može ići do n , $n/2$ ili \sqrt{n} . Još brži algoritam je ako prvo eliminišemo sve parne brojeve ($n \% 2 \neq 0$), pa zatim ispitujemo samo neparne djelioce do \sqrt{n} .

Zadaci za samostalan rad

Zadatak 9 – Prosti brojevi

Napiši program koji učitava prirodne brojeve a i b i štampa sve proste brojeve između a i b u rastućem poretku.

Zadatak 10 – Prosti djelioци broja

Napiši program koji učitava prirodan broj n i štampa sve njegove proste djelioce.

Zadatak 11 – NZS

Napiši program koji učitava prirodne brojeve a i b i štampa njihov najmanji zajednički sadržalac.

Zadatak 12 – Faktorisanje

Osnovna teorema aritmetike glasi: svaki prirodan broj n može se na jedinstven način zapisati kao proizvod prostih brojeva. Napiši program koji učitava prirodan broj n i štampa broj n kao proizvod prostih činilaca. Npr. za ulaz $n=84$ treba šampati: $2*2*3*7$.

Zadatak 13 – Faktorisanje 2

Svaki prirodan broj n može se na jedinstven način zapisati u sljedećem obliku: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, gdje su $n = p_1, p_2, \dots, p_k$ prosti brojevi i a_1, a_2, \dots, a_k prirodni brojevi. Napiši program koji učitava prirodan broj n i štampa broj n u datom obliku. Z stepenovanje koristiti simbol '^'. Npr. za ulaz $n=588$ treba šampati: 2^2*3*7^2 .

Zadatak 14 – Prošireni Euklidov algoritam

Napiši program koji učitava prirodne brojeve a i b i štampa cijele brojeve p i q takve da je $pa+qb=\text{NZD}(a,b)$.