



Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

# Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola

Cijena 1,50 €

Nagradni zadatak  
je na strani 13

BROJ 21 - GODINA 2023.

# **Udruženje nastavnika matematike Crne Gore**

Matematički list za učenike osnovnih škola – „Dijagonala“, broj 21

Godina 2023.

Cijena: 1,50 €

*Glavni urednik:* mr Radomir Božović

*Odgovorni urednik:* Danijela Jovanović

*Redakcija:* Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović,  
Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Andja Vujović,  
Milan Rosandić, Nikola Radojičić, Irena Pavićević,  
Nevena Ljujić

*Lektura:* Milja Božović, prof.

*Korektura:* Danijela Jovanović, prof.

*Priprema za štampu:* Branko Gazdić

*Tiraž:* 1000

*Štampa:* „Studio Branko“ d.o.o. – Podgorica

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio  
časopis „Dijagonala“ za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

## **Sadržaj**

Razmjere, proporcije, procenti .....	<b>3</b>
Djeljivost brojeva (za one koji žele da nauče više) .....	<b>13</b>
C++ vektor .....	<b>14</b>
Zadaci za vježbu .....	<b>20</b>
Odabrani zadaci .....	<b>28</b>
Takmičarski zadaci .....	<b>29</b>
Rješenja takmičarskih zadataka iz prošlog broja .....	<b>30</b>
Priprema za čas .....	<b>34</b>
Zanimljivosti .....	<b>38</b>
Matematički simboli - kratka istorija .....	<b>38</b>

Prof. dr Miomir Anđić

# RAZMJERE, PROPORCIJE, PROCENTI

## (napredni nivo)

„*Omnia in numera et mensura*“<sup>1</sup>

### RAZMJERE I PROPORCIJE

Matematika je kao nauka sve prisutnija u drugim naučnim oblastima, posebno u praktičnim primjenama, kao što je elektronika, informatika, biologija, medicina, ekonomija itd. Naime, sve je veća težnja za kvantifikovanjem raznih oblasti nauke i prakse uopšte, zbog čega su nastale, a razvijaju se i nove kvantitativne metode pomoću kojih se mogu opisati razna stanja i procesi u praksi. Na taj način i sa tom motivacijom, uz neprekidnu težnju čovjeka da u svom radu ima potrebu da mjeri i upoređuje razne veličine i parametre, posebno u ekonomiji, nastala je tzv. *privredna matematika*.

Znanje o razmjerama neophodno nam je u svakodnevnom životu. U kuhi-nji nam je važno upotrijebiti dobar odnos (razmjeru) namirnica, kako bi nam jelo bilo ukusno. Želimo li negdje da putujemo i koristimo kartu, moramo znati u kojoj je razmjeri ona napravljena. Želimo li obojiti zidove tačno određenom nijansom, boje moramo pomiješati u određenom odnosu. Pri pranju rublja u određenoj razmjeri stavljamo prašak ili omekšivač. U građe-vinarstvu je potrebno u određenom odnosu pomiješati cement, pjesak i vodu kako bismo dobili kvalitetan beton. Razmjere se koriste u proizvodnji ljekova i metalnih predmeta. Ekrani televizora i monitora izrađuju se u određenoj razmjeri. Razmjere nam trebaju i u astronomiji, hemiji i drugim naukama. Pomoću proporcija u banci ili mjenjačnici razmjenjujemo devize po kursnoj listi. Na više mjesta u fizici se koriste proporcije. Na primjer, brzina je odnos dužine pređenog puta i proteklog vremena, koje je potrebno da bi tijelo prešlo taj put.

Slijedi nekoliko interesantnih primjera, teorema i zadataka.

**Primjer 1.** Datu duž dužine  $a$  treba podijeliti na dva dijela tako da se veći dio  $x$  odnosi prema ostatku  $a - x$  kao cijela duž prema većem dijelu.

Konstrukciju takve podjele nalazimo još kod Euklida u njegovim „Elementima“ (treći vijek p.n.e.). Koliki je značaj bio za rješenje takvog problema, vidi se iz toga što se takva podjela zove „zlatni presjek“, „Sectio aurea“, pa čak i „božanstvena proporcija“.

<sup>1</sup> Latinska poslovica: *Sve je u broju i mjerenu*

Dakle, „božanstvena proporcija“ glasi:  $x:(a-x)=a:x$ . Ovo je kvadratna jednačina, čije je rješenje  $x=a\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,6a$  ( $a>0$ ), a rješava se u drugom razredu srednje škole.

Kako naći sve brojeve  $x$  i  $y$  koji sa datim brojevima  $a$  i  $b$  obrazuju proporciju  $x:y=a:b$ ? Odgovor daje sljedeća teorema.

**Teorema 1.** U dатој proporciji  $x:y=a:b$  ( $xyab \neq 0$ ) postoji beskonačno mnogo realnih brojeva oblika  $x=ak$  i  $y=bk$ , gdje je  $k$  proizvoljan realan broj različit od nule.

**Dokaz:** Zapišimo proporciju  $x:y=a:b$  u obliku  $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ . Množenjem obje strane ove jednakosti sa  $\frac{y}{a}$  dobijamo  $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ . Ako sa  $k$  označimo vrijednosti razlomaka  $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$ , neposredno slijedi da je  $\frac{x}{a}=k$  i  $\frac{y}{b}=k$ , odnosno da je  $x=ak$  i  $y=bk$ .

U nekim zadacima biće potrebno da posmatramo više jednakih razmjera.

**Definicija 1.** Jednakost tri ili više razmjera naziva se *produžena proporcija*.

**Definicija 2.** Neka su  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , realni brojevi različiti od nule. Jednakost  $a_1:b_1=a_2:b_2=\dots=a_n:b_n$ , odnosno  $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$  naziva se *proporcija dužine  $n-1$* .

**Napomena:** Dužina proporcije jednaka je broju pojavljivanja znaka  $=$  u produženoj proporciji. Proporcija dužine 1, dakle jednakost  $a_1:b_1=a_2:b_2$  zove se *prosta proporcija*.

**Primjer 2.**  $a:m=b:n=c:p (=k)$  ili  $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p} (=k)$  je produžena proporcija dužine 2, koju zapisujemo u obliku  $a:b:c=m:n:p$ . Brojoci razlomaka se odnose kao odgovarajući imenioci, odnosno  $a=mk$ ,  $b=nk$ ,  $c=pk$ . Iz produžene proporcije možemo formirati više prostih proporcija, obrnuto je složeniji postupak.

**Primjer 3.** Napisati produženu proporciju na osnovu prostih proporcija  $a:b=2:3$ ,  $b:c=4:5$  i  $d:a=6:7$ .

**Rješenje:** Date proporcije napišimo u obliku  $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ ,  $\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$  i  $\frac{d}{6}=\frac{a}{7}$ .

Jednake razmjere (razlomke) dobićemo ako brojiocima koji su označeni istim slovima dodijelimo jednake imenioce. Jednakost množimo recipročnom vrijednošću broja koji se dobija kada se najmanji zajednički sadržalac za imenioce razlomaka sa zajedničkim brojiocem, pojedinačno podijele tim imeniocima.

Iz prve dvije jednakosti uočavamo zajednički brojilac - broj  $b$ . Kako je

$\text{NZS}(3,4)=12$ , prvu jednakost množimo sa  $\frac{1}{12:3}=\frac{1}{4}$ , a drugu sa

$\frac{1}{12:4}=\frac{1}{3}$ , na osnovu čega dobijamo da je  $\frac{a}{8}=\frac{b}{12}$  i  $\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$ , odakle

slijedi da je  $\frac{a}{8}=\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$ . (1)

Uzimajući u obzir treću proporciju  $\frac{d}{6}=\frac{a}{7}$  (2) i činjenicu da je sada  $a$  zajednički brojilac i  $\text{NZS}(8,7)=56$ , množimo (1) brojem  $\frac{1}{56:8}=\frac{1}{7}$ , (2)

brojem  $\frac{1}{56:7}=\frac{1}{8}$  i nalazimo da je  $\frac{a}{56}=\frac{b}{84}=\frac{c}{105}=\frac{d}{42}$ . Konačno je

$a:b:c:d=56:84:105:42$  tražena produžena proporcija.

**Teorema 2.** Ako je  $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$  i ako su  $k_1, k_2, k_3, k_4$  realni brojevi od kojih je bar

jedan različit od nule, tada je  $\frac{k_1a_1+k_2b_1}{k_3a_1+k_4b_1}=\frac{k_1a_2+k_2b_2}{k_3a_2+k_4b_2}$ .

**Dokaz:** Neka je  $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=k$  ( $k \neq 0$ ). Tada je  $a_1=kb_1$  i  $a_2=kb_2$ , pa je

$$\frac{k_1a_1+k_2b_1}{k_3a_1+k_4b_1}=\frac{k_1kb_1+k_2b_1}{k_3kb_1+k_4b_1}=\frac{(k_1k+k_2)\cdot b_1}{(k_3k+k_4)\cdot b_1}=\frac{k_1k+k_2}{k_3k+k_4}$$

$$\frac{k_1a_2+k_2b_2}{k_3a_2+k_4b_2}=\frac{k_1kb_2+k_2b_2}{k_3kb_2+k_4b_2}=\frac{(k_1k+k_2)\cdot b_2}{(k_3k+k_4)\cdot b_2}=\frac{k_1k+k_2}{k_3k+k_4},$$

čime je teorema dokazana.

## 6 Dijagonala

**Teorema 3.** Ako je  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$  ( $a_i \cdot b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ ) i ako su

$k_1, k_2, \dots, k_n$  realni brojevi od kojih je bar jedan različit od nule, tada je

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = \frac{a_i}{b_i},$$

odnosno

$$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n) : (k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n) = a_i : b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**Dokaz:** Neka je  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$ , onda je  $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_n = kb_n$

$$\text{pa je } \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = \frac{k_1 kb_1 + k_2 kb_2 + \dots + k_n kb_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} =$$

$$\frac{k(k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n)}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = k = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

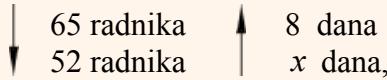
**Primjer 4.** Jedan posao je započelo 65 radnika i po planu je da ga završe za 23 dana. Međutim, poslije 15 dana, 13 radnika je napustilo posao. Koliko dana treba onima koji su ostali da završe ostatak posla?

**Rješenje:** Ovdje ne treba odmah upisivati podatke u gornji dio šeme, već:

65 radnika      23 dana  
65 radnika      8 dana.

U zadatku se kaže da je poslije 15 dana otišlo 13 radnika, što znači da je ostalo  $(23 - 15) = 8$  dana za završetak posla, i taj posao bi završilo 65 radnika.

Međutim, kako je otišlo 13 radnika, to je ostalo  $(65 - 13) = 52$  radnika, i oni će ostatak posla završiti za  $x$  dana. Dakle, imamo šemu:



$x : 8 = 65 : 52$ , odakle je  $x = 10$  dana. Da je bilo pitanje: „Za koliko dana bi cio posao bio završen“?, odgovor bi bio  $15 + 10 = 25$  dana.

### SLOŽENO PRAVILA TROJNO

Ako u problemu koji rješavamo učestvuje više od jednog para proporcionalnih veličina, tada se nepoznata veličina može dobiti pomoću tzv. složenog pravila trojnog. Moramo voditi računa da se istorodne veličine pišu jedna ispod druge. Prva strelica u šemi polazi od nepoznate veličine  $x$ , dok se

ostale strelice usmjeravaju u zavisnosti od odnosa poznatih veličina prema nepoznatoj  $x$ . Dakle, isti smjer strelica biće u slučaju kada je dotična veličina direktno proporcionalna sa nepoznatom  $x$ , a suprotan ako je obrnuto proporcionalna sa  $x$ .

**Primjer 5.** Za 150 € kupljeno je 4 m štofa širine 75 cm. Koliko treba novca za 8 m istog štofa širine 45 cm?

**Rješenje 1:** Umjesto da dužinu i širinu štofa posebno tretiramo, izračunaćemo njihove površine u  $m^2$ :  $4 \cdot 0,75 = 3$  i  $8 \cdot 0,45 = 3,6$ . Sada primjer može da glasi: Za 150 € kupljeno je  $3 m^2$  štofa. Koliko treba novca za  $3,6 m^2$  istog štofa?

Odgovarajuća šema je

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 150 \text{ €} & \uparrow \\ & x \text{ €} & \\ \uparrow & 3 m^2 & \\ & 3,6 m^2 & \end{array}$$

pa odgovor slijedi iz proporcije  $x : 150 = 3,6 : 3$  a odатle je  $x = 180$  eura.

**Rješenje 2:** Potpišimo u šemi koja slijedi, odgovarajuće veličine jednu ispod druge.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 150 \text{ €} & \uparrow \\ & x \text{ €} & \\ \uparrow & 4 \text{ m} & \uparrow \\ & 8 \text{ m} & \\ \uparrow & 75 \text{ cm} & \uparrow \\ & 45 \text{ cm} & \end{array}$$

Nacrtajmo strelicu od  $x$  „nagore“, pa posmatrajmo podatak po podatku, uparujući eure sa metrima, a onda eure sa centimetrima, koristeći složeno pravilo trojno.

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & 150 \text{ €} & \uparrow & 4 \text{ m} & \uparrow & 150 \text{ €} & \uparrow \\ & x \text{ €} & & 8 \text{ m} & & x \text{ €} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \uparrow & 75 \text{ cm} & \uparrow & 45 \text{ cm} & \uparrow & & \end{array}$$

Sada smjer strelica vratimo u produženu proporciju.

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & 150 \text{ €} & \uparrow & 4 \text{ m} & \uparrow & 75 \text{ cm} \\ & x \text{ €} & & 8 \text{ m} & & 45 \text{ cm} \end{array}$$

Pratimo smjer strelica (pažnja: znak = piše se ispod znaka =) i dobijamo proporciju.

$$x : 150 = 8 : 4$$

$$= 45 : 75.$$

Proizvod svih spoljašnjih članova jednak je prozvodu svih unutrašnjih članova.

$$x \cdot 4 \cdot 75 = 150 \cdot 8 \cdot 45, \text{ a odatle je } x = 180 \text{ eura.}$$

**Napomena:** Nije potrebno u datoј šemi sve veličine izraziti u istim jedinicama, osim onih koje se nalaze jedna ispod druge.

**Primjer 6.** Radeći dnevno po 8 časova, 21 inženjer za 6 dana izradi 720 kompjutera određene marke. Za koliko će dana 28 inženjera iste struke, radeći po 7 časova dnevno, izraditi 1260 kompjutera iste marke?

**Rješenje:**

$$\begin{array}{lll} 8 \text{ h} & 21 \text{ inženjer} & \uparrow \\ 7 \text{ h} & 28 \text{ inženjera} & x \text{ dana} \end{array}$$

Posmatrajmo podatak po podatak

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & 8 \text{ h} & \uparrow & 6 \text{ dana} & \downarrow & 21 \text{ inženjer} & \uparrow \\ \downarrow & 7 \text{ h} & \uparrow & x \text{ dana} & \downarrow & 28 \text{ inženjera} & \uparrow \\ & & & & & & \end{array} \begin{array}{ccccccc} \uparrow & 6 \text{ dana} & \uparrow & 720 \text{ komp.} & \uparrow & 6 \text{ dana} & \uparrow \\ \uparrow & x \text{ dana} & \uparrow & 1260 \text{ komp.} & \uparrow & x \text{ dana} & \uparrow \\ & & & & & & \end{array}$$

Sada smjer strelica vratimo u produženu proporciju

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & 8 \text{ h} & \downarrow & 21 \text{ inženjer} & \uparrow & 6 \text{ dana} & \uparrow \\ \downarrow & 7 \text{ h} & \downarrow & 28 \text{ inženjera} & \uparrow & x \text{ dana} & \uparrow \\ & & & & & & \end{array} \begin{array}{ccccccc} \uparrow & 720 \text{ komp.} & \uparrow & 1260 \text{ komp.} & \uparrow & 6 \text{ dana} & \uparrow \\ & & & & & & \end{array}$$

Praćenjem smjera strelica, krećući od  $x$  slijedi:

$$x : 6 = 8 : 7$$

$$= 21 : 28$$

$$= 1260 : 720$$

$$x \cdot 7 \cdot 28 \cdot 720 = 6 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 1260 \text{ odakle je } x = 9 \text{ dana.}$$

**Primjer 7.** Tri mačke za 4 dana ulove 5 miševa. Koliko mačaka bi za 7 dana ulovilo 140 miševa?

**Rješenje:**

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 3 \text{ mačke} & \downarrow \\ x : 3 & = 4 : 7 & 4 \text{ dana} \\ & = 140 : 5 & 7 \text{ dana} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow & 5 \text{ miševa} \\ 140 \text{ miševa} & \uparrow \end{array}$$

$$\text{Odatle je } x \cdot 7 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 140, \text{ pa imamo } x = 48 \text{ miševa.}$$

**Primjer 8.** Tri lica starosti 20, 16 i 8 godina, radeći na plaži zaradila su ukupno 3800 €. Ukupan iznos su podijelili tako da se njihove zarade odnose obrnuto сразмјерно godinama starosti. Koliko je svako od njih zaradio?

**Rješenje:** Označimo, redom, sa  $x$ ,  $y$  i  $z$  zarade lica starih 20, 16 i 8 godina.

$$x : y : z = \frac{1}{20} : \frac{1}{16} : \frac{1}{8} = \frac{4}{80} : \frac{5}{80} : \frac{10}{80} = 4 : 5 : 10, \text{ pa je } x = 4k, y = 5k \text{ i } z = 10k$$

Kako je  $x + y + z = 3800$  €, slijedi da je  $4k + 5k + 10k = 3800$ , odnosno  $k = 200$ .

Traženi iznosi su  $x = 4 \cdot 200 = 800$  €,  $y = 5 \cdot 200 = 1000$  € i  $z = 10 \cdot 200 = 2000$  €.

**Primjer 9.** Darko, Bojan i Saša su naslijedili sumu od 27750 €. Prema testamentu, sume koje dobijaju Darko i Bojan odnose se kao 3:2, a suma koja pripada Saši, prema Darkovoj sumi stoji u razmjeri 4:5. Koliko je svako od njih naslijedio?

**Rješenje:** Iz praktičnih razloga, označimo tražene sume početnim slovima imena. Dalje je:  $D:B=3:2$  i  $S:D=4:5$ . Formirajmo produženu proporciju:

$D:B=15:10$  i  $S:D=12:15$  odakle je  $S:D:B=12:15:10$ , tj.  $S=12k$ ,  $D=15k$ ,  $B=10k$ .

Kako je  $D+B+S=27750$ , slijedi  $15k+10k+12k=27750$ , pa je  $k=750$ . Tražene sume su:  $D=11250$ ,  $B=7500$  i  $S=9000$  eura.

## PROCENTI

U računu sa procentima pojavljuje se osnovna veličina, koju najčešće nazivamo *glavnicom* i označavamo je sa  $G$ . To je najčešće plan, cijena, norma i sl. Zatim, sa  $p$  označavamo broj procenata sa kojima operišemo, a *procentni iznos*, označavamo sa  $P$  (na primjer: prebačaj ili podbačaj plana ili norme, razlika u cijeni i sl.).

Ove veličine su direktno proporcionalne,

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & G \text{ jedinica} & \uparrow 100 \text{ procenata} \\ \uparrow & P \text{ jedinica} & \uparrow p \text{ procenata} \end{array}$$

zato važi proporcija  $P:G=p:100$  ili  $G:P=100:p$ .

Odavde se jednostavnom primjenom prostog pravila trojnog izračunava potrebna veličina,

$$G = \frac{100P}{p}, \quad P = \frac{G \cdot p}{100}, \quad p = \frac{100 \cdot P}{G}.$$

Pri rješavanju raznih zadataka iz procenata, pogodno je koristiti decimalni zapis za procente.

- Ako broj  $x$  uvećamo za  $p\%$ , novi broj je

$$x + p\%x = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x.$$

- Međutim, ako broj  $x$  umanjimo za  $p\%$ , novi broj je

$$x - p\%x = x - \frac{p}{100}x = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x.$$

**Primjer 10.** Cijena nekog proizvoda se prvo uveća (proizvod poskupi) za 20%, a zatim se nova cijena umanji za isti procenat. Šta je sa konačnom cijenom?

**Rješenje:** Označimo sa  $x$  prvobitnu cijenu. Poslije poskupljenja od 20% nova cijena je  $1,2x$ . Poslije sniženja nove cijene za 20% (proizvod je pojeftinio, cijena je snižena), konačna cijena je  $1,2x \cdot 0,8 = 0,96x$ . Dakle, konačna cijena je manja za 4%.

**Primjer 11.** Proizvod prvo pojeftini 20%, a onda za 20% poskupi. Šta je sa konačnom cijenom?

**Rješenje:** Ako je  $x$  prvobitna cijena, onda je nova cijena  $0,8x \cdot 1,2 = 0,96x$ , što je za 4% manje od prvobitne.

**Primjer 12.** Cijena mobilnih telefona je uvećana za 30%, a zatim je nova cijena snižena za 10%. Za koliko je procenata trebalo promijeniti cijenu telefona, odmah na početku, da bi postigli istu krajnju cijenu?

**Rješenje:** Neka je  $x$  početna cijena telefona. Tada je  $(1+0,30)x = 1,30x = y$  cijena poslije uvećanja od 30%. Sada ovu cijenu treba umanjiti za 10%. Konačna cijena je  $y(1-0,1) = 0,9y = 0,9 \cdot 1,3x = 1,17x$ . Cijenu je trebalo uvećati na početku za 17%. Račun može biti kraći, ako zapisujemo:  $x(1+0,30) \cdot (1-0,1) = 1,17x = (1+0,17)x$ .

**Primjer 13.** Masa tek oborenog stabla iznosi 2,25 tona i sadrži 64% vode. Poslije nedelju dana to stablo je sadržalo 46% vode. Za koliko se smanjila masa stabla za tu nedelju dana?

**Rješenje:** Suva materija, koja ne isparava, predstavlja  $p = 100\% - 64\% = 36\%$  od  $2,25\text{ t}$ ,  $G = 2,25\text{ t}$ , pa je  $P = \frac{Gp}{100} = 0,81\text{ t}$ . Ova količina poslije sušenja čini  $100\% - 46\% = 54\%$  mase stabla, odnosno:  $p = 54\%$ ,  $P = 0,81\text{ t}$ , pa je  $G = \frac{100P}{p} = 1,5\text{ t}$ . Masa se smanjila za  $2,25\text{ t} - 1,5\text{ t} = 0,75\text{ t}$ .

### ZADACI S TAKMIČENJA

- Jedan ugao trougla je za 50% manji od drugog, a treći ugao predstavlja 50% zbira prva dva. Koliko stepeni ima svaki od njih?

**Rješenje:** Neka su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  uglovi trougla. Prema uslovu zadatka je:

$$\alpha = 50\% \beta = \frac{1}{2} \beta \text{ i } \gamma = 50\%(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \beta + \beta \right) = \frac{3}{4} \beta. \text{ Kako je}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \text{ slijedi } \frac{1}{2} \beta + \beta + \frac{3}{4} \beta = 180^\circ, \text{ odnosno } \beta = 80^\circ.$$

Dalje je  $\alpha = 40^\circ$  i  $\gamma = 60^\circ$ .

2. Svježa trava sadrži 80% vode, a sijeno 20%. Koliko treba svježe trave da bi se dobila tona sijena?

**Rješenje:** Neka je  $x$  masa tražene svježe trave. Tona sijena sadrži 1000 ·

$0,2 = 200 \text{ (kg)}$  vode i  $1000 - 200 = 800 \text{ kg}$  suve materije. Tih  $800 \text{ kg}$  su samo 20% svježe trave, tj.  $20\% \cdot x = 800$ , odakle je  $x = 4000 \text{ kg} = 4t$ .

3. Ako se dužina kvadra poveća za 25%, širina za trećinu i visina smanji za 10%, kako se mijenja zapremina?

**Rješenje:** Neka je  $a$  dužina,  $b$  širina i  $c$  visina kvadra. Dimenzije novog kvadra

su:  $a_1 = a + 25\%a = 1,25a$ ,  $b_1 = b + \frac{1}{3}b = \frac{4}{3}b$ ,  $c_1 = c - 10\%c = 0,9c$ , pa će njegova zapremina biti:

$$V_1 = 1,25a \cdot \frac{4}{3}b \cdot 0,9c = \frac{3}{2}abc = 1,5abc = abc + 0,5abc \\ = V + 50\%V \text{ (ili } V_1 = 1,5abc = 1,5V).$$

Zapremina se poveća za 50%.

4. U jednom gradu sprovedena je anketa u kojoj je učestvovalo 20 040 učenika koji uče ili engleski ili njemački jezik (tačno jedan od njih). Od učenika koji uče engleski jezik, iz nepoznatih razloga, 20% je izjavilo da uči njemački jezik, 20% učenika koji uče njemački u anketi je izjavilo da uči engleski. Po ovoj anketi 40% učenika u ovom gradu je izjavilo da uči njemački jezik. Koliko učenika u ovom gradu uči engleski jezik?

**Rješenje:** Ako sa  $x$  označimo broj učenika koji uče engleski, tada je:

$20\% (20040 - x)$  broj učenika koji uče njemački jezik, pa je:

$$0,8(20040 - x) + 0,2x = 0,4 \cdot 20040, \text{ odakle je } x = 13360.$$

5. Poslije sniženja cijene za 20%, za 8 € može se kupiti jedna sveska više nego što se prije sniženja moglo kupiti za 9 €. Kolika je bila cijena jedne sveske prije sniženja?

**Rješenje:** Neka je  $x$  prodajna cijena sveske. Snižena cijena je  $0,8x$ . Na osnovu uslova zadatka jednačina glasi  $\frac{8}{0,8x} = \frac{9}{x} + 1$ , a njen rješenje je  $x = 1 \text{ €}$ .

- 6.** Bilo je predviđeno da se izvjesna količina trešanja proda po cijeni od 5 € po kilogramu. Od te količine 25% je prodato po predviđenoj cijeni, 35% po cijeni koja je za 20% veća, a ostatak je prodat po cijeni koja je za 10% manja od predviđene. Na taj način je zarađeno 300 € više nego da je cijela količina trešanja bila prodata po predviđenoj cijeni. Koliko kg trešanja je prodato?

**Rješenje:** Neka je  $x$  količina trešanja koja se prodaje. Tada je ukupan prihod po predviđenoj cijeni  $5x$  eura. Prema redoslijedu prodaje je:

$$0,25 \cdot 5x + 0,35 \cdot 5x \cdot 1,2 + 0,9(5x - (0,25 \cdot 5x + 0,35 \cdot 5x)) = 5x + 300,$$

odakle je  $5,15x = 5x + 300$ , odnosno  $x = 2000 \text{ kg} = 2 \text{ t}$  trešanja.

- 7.** Cijena ulaznice za košarkašku utakmicu je 20 €. Kada je cijena ulaznice smanjena, broj posjetilaca se povećao za 50%, a prihod za 20%. Kolika je nova cijena ulaznica?

**Rješenje:** Neka je  $x$  broj posjetilaca. Ukupan prihod je ranije bio  $20x$ , a sada je 20% veći i iznosi  $20x \cdot 1,2 = 24x$ . Kako je sada broj posjetilaca veći za 50%, on iznosi  $x \cdot 1,5 = 1,5x$ . Nova cijena karte je  $24x : 1,5x = 16$  €.

### ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD

- 1.** Odrediti nepoznate veličine iz proporcija:

$$a:b = 7:8, \quad c:d = 9:10, \quad b:d = 4:5 \text{ i } a-3b-5c+7b=16.$$

(R:  $a=14, b=16, c=18, d=29$ )

- 2.** Ako je  $\frac{x-y+z}{3} = \frac{y-z+x}{4} = \frac{z-x+y}{5}$ , izračunati razmjeru  $x:y:z$ .

(R:  $x:y:z = 7:9:8$ )

- 3.** Nemanja, Nikolina, Jovan i Helena dobili su u igri LOTO 123 500 € i dobitak su podijelili srazmjerno ulozima. Jovanov ulog prema Nemanjinom ulogu odnosi se kao 5:2, dok je Nikolina uložila 3 puta manje od Helene. Nemanjin ulog prema Heleninom je  $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ . Koliko je svako dobio?

(R: Nemanja 23400 €, Nikolina 10400 €, Jovan 58500 €, Helena 31200 €.)

- 4.** Mačka i po tri i po dana ulovi četiri i po miša. Koliko će miševa uloviti pet i po mačaka za 21 dan?

(R: 99 miševa)

- 5.** Neki posao radi ekipa od 9 radnika i po planu treba da ga završi za 46 dana. Poslije 6 dana preduzeće odluči da ubrza izvršenje posla. Stoga, počev od sedmog dana, na posao dođe još šest radnika. Za koliko dana je urađen cijeli posao?

(R: 30 dana)

- 6.** Grupa od 120 gorana treba da pošumi  $5 \text{ ha}$  goleti za 14 dana, radeći  $5 \text{ h}$  dnevno. Poslije 4 dana dođe nova grupa od 30 gorana. Štab tada odluči da se posao završi 2 dana prije planiranog roka i da se jedan od planiranih hektara ne pošumljava. Koliko časova dnevno treba da rade da završe posao? **(R: 4 h dnevno)**
- 7.** Dužina pravougaonika je smanjena za  $2,4 \text{ cm}$ , a širina je uvećana za  $30\%$ . Površina dobijenog pravougaonika je za  $4\%$  veća od prvobitnog. Izračunati dužinu novog pravougaonika. **(R: 9,6 cm)**

## DJELJVOST BROJEVA

(za one koji žele da nauče više)

Broj je djeljiv sa:

- **7, 11, 13, 77, 91, 143 ili 1001** kada je razlika između zbiru trocifrenih klasa koje u broju stoje na neparnim mjestima i zbiru trocifrenih klasa koje stoje na parnim mjestima (gledati od poslednje cifre) djeljiva datim brojem.

**Primjer:** Za broj 539 693 385 imamo da važi  $385 - 693 + 539 = 231$ , pa je djeljiv sa 7, 11 i 77.

- **8** ako je trocifreni broj koji čine tri posljednje cifre tog broja djeljiv s 8.
- **11** ako su mu naizmjenična razlika i zbir cifara slijeva udesno djeljivi s 11 ili jednaki nuli.

**Primjer:** Broj 40678 djeljiv je s 11 jer  $4 - 0 + 6 - 7 + 8 = 11$ .

Djeljivost brojem 11 se može ispitati i na sledeće načine:

- Broj je djeljiv brojem 11 samo ako mu razlika između zbiru cifara na neparnim mjestima i zbiru cifara na parnim mjestima djeljiva sa 11.
- Broj je djeljiv brojem 11 samo ako mu razlika između zbiru cifara na parnim mjestima i zbiru cifara na neparnim mjestima djeljiva sa 11.
- **13** ako je zbir broja desetica i četverostrukih cifri jedinica djeljiv s 13.

**Primjer:** Broj 338 je djeljiv sa 13 jer  $33 + 4 \cdot 8 = 65$ . Dalje imamo  $6 + 4 \cdot 5 = 26$  a 13 je djelilac broja 26.

- **17** ako je razlika broja desetica i petostrukih cifri jedinica djeljiva sa 17.
- **19** ako je zbir broja desetica i dvostrukih cifri jedinica djeljiv s 19.

Istražite još neka pravila djeljivosti i isprobajte ih na primjerima. Srećno!

# C++ VEKTOR

U programskom jeziku C++, vektori se, kao i nizovi, koriste da čuvaju elemente istog tipa. Za razliku od nizova, veličina vektora tj, broj elemenata koje čuva, može se mijenjati dinamički. Tokom izvršavanja programa možemo dodavati i brisati elemente iz vektora.

Vektori su dio takozvane standardne biblioteke šablonu (engl. Standard Template Library) ili skraćeno STL. Da bi mogli da ih koristimo u programima, neophodno je uključiti header fajl vector u vaš kod:

```
#include <vector>
```

Vektori se deklarišu na sljedeći način:

```
std::vector<T> vector_name;
```

Slovo T unutar simbola `<i>` označava takozvani parametar tipa (`<T>`) i može biti bilo koji tip kao `int, char, float, itd.` Na primjer,

```
vector<int> brojevi;
```

Obratite pažnju da nijesmo zadali veličinu vektora.

## Inicijalizacija vektora

Vektor se može inicijalizovati na više načina.

### Prvi način:

```
// Lista vrijednosti  
vector<int> vect1 = {1, 2, 3, 4, 5};  
  
// Uniformna inicijalizacija  
vector<int> vect2 {1, 2, 3, 4, 5};
```

Direktno smo zadali vrijednosti. I `vect1` i `vect2` su inicijalizovani da sadrže vrijednosti **1, 2, 3, 4, 5**.

### Drugi način:

```
vector<int> vect3(4, 10);
```

U ovom primjeru, **4** je veličina vektora dok je **10** vrijednost koju će imati sva 4 elementa vektora. Ekvivalentna naredba je:

```
vector<int> vect3 = {10, 10, 10, 10};
```

**Primjer: C++ inicijalizacija vektora**

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {

    // lista
    vector<int> vect1 = {1, 2, 3, 4, 5};

    // uniformna inicijalizacija
    vector<int> vect2 {6, 7, 8, 9, 10};

    // treci nacin
    vector<int> vect3(4, 10);

    cout << "vect1 = ";

    // ranged loop
    for (const int& i : vect1) {
        cout << i << " ";
    }
    cout << endl;

    cout << "vect2 = ";

    //
    for (const int& i : vect2) {
        cout << i << " ";
    }
    cout << endl;

    cout << "vect3 = ";

    // ranged loop
    for (int i : vect3) {
        cout << i << " ";
    }

    return 0;
}
```

**Izlaz**

```
vect1 = 1 2 3 4 5
vect2 = 6 7 8 9 10
vect3 = 10 10 10 10
```

## Osnovne operacije sa vektorima

Klasa `vector` sadrži više metoda za rad sa vektorima. Pokazaćemo kako se pristupa elementima vektora i kako se dodaju, mijenjaju i brišu elementi iz vektora.

Dodavanje jednog elementa u vektor vrši se pomoću funkcije `push_back()`, koja umeće novi element kao posljednji element vektora.

### Primjer:

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    vector<int> num {1, 2, 3, 4, 5};

    cout << "Pocetni vektor: ";

    for (const int& i : num) {
        cout << i << " ";
    }

    // dodajemo 6 i 7 na kraj vektora
    num.push_back(6);
    num.push_back(7);

    cout << "\nVektor sa novim elementima:";

    for (const int& i : num) {
        cout << i << " ";
    }

    return 0;
}
```

### Izlaz

```
Pocetni vektor: 1 2 3 4 5
Vektor sa novim elementima: 1 2 3 4 5 6 7
```

Pored funkcije `push_back()`, možemo koristiti i funkcije `insert()` i `emplace()`. Tada se koriste takozvani iteratori, o kojima ćemo govoriti u narednim lekcijama.

Pristup elementima vektora može se uraditi pomoću funkcije `at()` ili primjenom srednjih zagrada, kao kod nizova.

**Primjer:**

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    vector<int> num {1, 2, 3, 4, 5};

    cout << "Funkcija at(): " << endl;
    cout << "Element at Index 0: " << num.at(0) << endl;
    cout << "Element at Index 2: " << num.at(2) << endl;
    cout << "Element at Index 4: " << num.at(4) << endl;

    cout << "\nKao kod niza: " << endl;
    cout << "Element at Index 0: " << num[0] << endl;
    cout << "Element at Index 2: " << num[2] << endl;
    cout << "Element at Index 4: " << num[4] << endl;

    return 0;
}
```

**Izlaz**

```
Funkcija at():
Element at Index 0: 1
Element at Index 2: 3
Element at Index 4: 5

Kao kod niza:
Element at Index 0: 1
Element at Index 2: 3
Element at Index 4: 5
```

Preporučujemo da koristite funkciju `at()` jer ona izaziva izuzetak (engl. exception) kada zadate nepostojeći indeks, dok `[]` daju vrijednost koja se nalazi u memoriji u tom trenutku.

```
vector<int> v1 {1, 2, 3};

// štampa sadržaj memorije
cout << v1[4];
// izaziva exception
cout << v1.at(4);
```

Promjena elementa vektora može se izvršiti pomoću funkcije `at()` ili pomoću `[]`.

**Primjer:**

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    vector<int> v1 {1, 2, 3, 4, 5};

    cout << "Pocetni vektor: ";
    for (const int& i : v1) {
        cout << i << " ";
    }

    // promjena elemenata sa indeksima 1 i 4
    v1.at(1) = 9;
    v1.at(4) = 7;

    cout << "\nPromijenjen vektor: ";
    for (const int& i : v1) {
        cout << i << " ";
    }

    return 0;
}
```

**Izlaz**

```
Pocetni vektor: 1 2 3 4 5
Promijenjen vektor: 1 9 3 4 7
```

Brisanje posljednjeg elementa u vektoru može se uraditi pomoću funkcije `pop_back()`.

**Primjer:**

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

int main() {
    vector<int> prime_numbers{2, 3, 5, 7};

    cout << "Pocetni vektor: ";
    for (int i : prime_numbers) {
        cout << i << " ";
    }
}
```

```

// uklanjamo posljedni element
prime_numbers.pop_back();

// novi vektor
cout << "\n Novi vektor: ";
for (int i : prime_numbers) {
    cout << i << " ";
}

return 0;
}

```

## Izlaz

Pocetni vektor: 2 3 5 7  
Novi vektor: 2 3 5

Pored funkcije `pop_back()`, možete koristiti i funkcije `pop_front()` i `erase()`. Funkcija `erase()` koristi iteratore, pa ćemo je detaljnije razmatrati u sljedećoj lekciji.

Na kraju, u tabeli su navedene neke funkcije nad vektorima koje vam mogu biti korisne:

Funkcija	Opis
<code>size()</code>	vraća broj elemenata u vektoru
<code>clear()</code>	uklanja sve elemente vektora
<code>front()</code>	vraća prvi element vektora
<code>back()</code>	vraća posljednji element vektora
<code>empty()</code>	vraća <b>1</b> (true) ako vektor nema elemenata

### Nagradni zadatak:

Ako se na svaku granu spusti po jedan vrabac, onda će za jednog vrapca nedostajati grana, a ako na svaku granu slete po dva vrapca, onda će jedna grana ostati slobodna.

Koliko je vrabaca u jatu a koliko grana?

---

Uz rješenje zadatka, pošaljite na mail UNMCG, ime, prezime, razred i naziv škole koju pohađate.

**ZADACI ZA VJEŽBU****VI razred****Djeljivost brojeva**

1. Zaokružiti tačna tvrđenja:  $2 | 346$ ;  $5 | 15\ 557$ ;  $3 | 6\ 789$ ;  $25 | 455$ ;  $4 | 56\ 742$ ;  $9 | 222$ ;  $3 | 45\ 003$ ;  $5 | 340$ .
2. Koji su od brojeva: 45, 222, 455, 1232, 1455, 5000, 6705, 10000, 12256, 34775 djeljivi sa:
  - a) 2?
  - b) 3?
  - c) 4?
  - d) 5?
  - e) 9?
  - f) 25?
3. Napisati sve djelioce broja 42, pa među njima zaokružiti proste brojeve.
4. Brojeve 135, 105 i 210 rastaviti na proste činioce i napisati sve djelioce svakog od ovih brojeva.
5. Proizvod tri uzastopna broja je 504. Koji su to brojevi?
6. Ne vršeći naznačene računske operacije ispitati tačnost tvrđenja:
  - a) Broj  $18 \cdot 232 + 450 \cdot 4\ 444$  djeljiv je sa 9.
  - b) Broj  $134 \cdot 232 + 357$  djeljiv je sa 2.
  - c) Broj  $405 \cdot 111 - 545$  djeljiv je sa 5.
7. Umjesto slova a i b odrediti odgovarajuće cifre tako da važi:
  - a)  $2 | 3a7b$ ;
  - b)  $9 | 41a3$ ;
  - c)  $4 | 34b$ ;
  - d)  $15 | a347b$ ;
  - e)  $6 | 3a4b$ .
8. Odrediti sve trocifrene brojeve djeljive sa 18, kod kojih su cifre stotina i jedinica jednake.
9. Odrediti najveći mogući broj kojim je moguće podijeliti brojeve 69 i 129, tako da ostatak dijeljenja u oba slučaja bude 3.
10. Tri broda istovremeno su isplovila iz luke. Prvi brod se vraća u luku svakog osmog dana, drugi brod svakog dvanaestog dana, a treći brod svakog osamnaestog dana. Za koliko dana će sva tri broda ponovo biti u luci u isto vrijeme?

**Prijedlog prvog pismenog zadatka****I grupa**

1. Iz sljedećeg skupa  $S = \{135, 464, 2132, 2500, 3123, 6930, 13008\}$  izdvoiti skup brojeva koji su djeljivi sa: a) 2; b) 4; c) 3; d) 9; e) 5.
2. Broj 132 predstaviti kao proizvod prostih činilaca i napisati sve njegove djelioce.
3. Ne vršeći računske operacije ispitati tačnost tvrđenja:
  - a)  $4 | (10\ 207 + 1\ 021)$ ;
  - b)  $9 | (1\ 575 \cdot 23 + 1\ 821)$ .

4. a) Umjesto \* upisati odgovarajuće cifre tako da:  
a)  $25 \mid 24^*5$ ; b)  $3 \mid 3572^*$ .
- b) U broju  $\overline{1a72b}$  odrediti sve cifre  $a$  i  $b$  tako da dati broj bude djeljiv sa 18.
5. Od 132 čokolade, 198 lizalica, 396 igračaka napravljeni su novogodišnji paketići za učenike. U svakom paketiću je bilo jednak broj čokolada, lizalica i igračaka. Koji je najveći mogući broj paketića napravljenih tako da svi slatkiši i igračke budu utrošeni? Koliko je u svakom paketiću bilo čokolada, lizalica i igračaka?

## II grupa

1. Iz sljedećeg skupa brojeva  $S = \{225, 452, 1232, 3500, 3213, 9630, 10704\}$  izdvojiti skup onih koji su djeljivi sa:  
a) 2; b) 4; c) 3; d) 9; e) 5.
2. Broj 156 predstaviti kao proizvod prostih činilaca i napisati sve njegove djelioce.
3. Ne vršeći računske operacije ispitati tačnost tvrđenja:  
a)  $4 \mid (10\ 203 + 1\ 041)$ ; b)  $3 \mid (127 \cdot 2\ 511 + 1\ 021)$ .
4. a) Umjesto \* upisati cifre tako da: a)  $25 \mid 84^*5$ ; b)  $3 \mid 3252^*$ .
- b) U broju  $\overline{1a34b}$  odrediti sve cifre  $a$  i  $b$  tako da dati broj bude djeljiv sa 15.
5. Od 90 karanfila, 225 ruža, 495 lala napravljeni su buketi. U svakom buketu je bio jednak broj karanfila, ruža i lala. Koji je najveći mogući broj buketa napravljenih tako da svo cvijeće bude utrošeno? Koliko je u svakom buketu bilo karanfila, ruža i lala?

**Dragana Borović i Nataša Ostojić, JU OŠ „Njegoš”, Spuž**

## VII razred

### Skup cijelih brojeva

1. a) Izračunati:
- $$A = -(2 - 7) - (1 - 9);$$
- $$B = -|-11 + 2| - 12;$$
- $$C = -(-(-2)) - (-3) + (-4);$$
- $$D = -(5 + 12 - 20 + 7); E = 2 + (-3) + 4 - |-8| + 3 + |-4|.$$
- b) Brojeve A, B, C, D, E poređati od najmanjeg do najvećeg.  
c) Za koliko je broj A veći od broja B ?

## 22 Dijagonala

2. Riješiti jednačine:
  - a)  $-13 + x + 2 = -1$ ;   b)  $8 - (-4 + x + 11) = -2 + (-7) - (-3 - 9)$ ;
  - c)  $a - x = 3$    ako je  $a = -|-2 + 5|$ .
3. Riješiti sljedeće nejednačine i rješenja prikazati na brojevnoj pravoj, a zatim odrediti koji cijeli brojevi mogu biti rješenja obje nejednačine:
  - a)  $-22 - 5 - x \leq -31$ ;
  - b)  $13 - (8 + x + 11) \leq 15 + (-9) - |-6 - 1|$ .
4. Oslobođiti se zagrade, pa izračunati vrijednost izraza
$$-a - \left( -8 - (-a - (-6 + a)) \right), \text{ za } a = -1.$$
5. Zbir brojeva  $-5$ ,  $15$  i  $-23$  umanjiti za razliku prvog i trećeg broja.
6. Ako je  $a = (-5 - (+8) + 5) + [5 - 3 - (-6 - 2) - 11]$  i
$$b = (8 - 16) - \{5 - [-3 + (-2 + 5) - 4]\}$$
izračunati  $|a - 4| - |2 - b|$ .
7. Koje cijele brojeve možemo uvećati za razliku brojeva  $-15$  i  $-10$  da bi dobili broj koji nije veći od suprotne vrijednosti zbiru brojeva  $-40$  i  $15$ ? Zadatak postaviti jednim izrazom.
8. Marko na računu ima  $5347$  eura. Koje će biti stanje na njegovom računu ako podigne  $8000$  eura?
9. U ponedeljak, 2. januara, na Žabljaku jutarnja temperatura je iznosila  $-7$  stepeni, a najviša dnevna  $-3$  stepena. U utorak je jutarnja temperatura pala  $3$  stepena u odnosu na prethodni dan, a najviša dnevna u odnosu na prethodni dan je porasla  $7$  stepeni. U srijedu je jutarnja temperatura bila jednaka jutarnjoj temperaturi prethodnog dana, a dnevna temperatura je  $7$  stepeni viša u odnosu na jutarnju temperaturu istog dana. Izračunati nepoznate jutarnje i najviše dnevne temperature u ova tri dana, i podatke predstaviti tabelom.
10. Uporediti  $A$  i  $-|B|$  ako je  $A = 1 + x - |x|$    ako je  $|x| = 8$ ,  $x < 0$  i  $B = 4 - (-(-9))$ .

### Prijedlog prvog pismenog zadatka

#### I grupa

1. Pregled jutarnjih temperatura u gradovima u Crnoj Gori prikazan je tabelom.

Pljevlja	Žabljak	Budva	Podgorica	Bar	Berane	B. Polje	H. Novi
$-8$	$-11$	$10$	$3$	$5$	$-9$	$-2$	$8$

- a) U kom gradu je najniža temperatura?  
 b) U kojim gradovima je temperatura manja od nule?  
 c) Gdje je viša temperatura, u Žabljaku ili u Bijelom Polju?  
 d) Koliko stepeni je razlika u temperaturi u Podgorici i Pljevljima?  
 e) U kom gradu je temperatura najbliža nuli?
2. Izračunati:
- a)  $4 - 8 + 2 - 6 - 10 + 8$ ;    b)  $-5 + (-2) - (-8) - 6 - (-1) + 7$ ;  
 c)  $-(-(-3 + 2)) + (-4 + 4)$ ;    d)  $|-4 + 12| - |-10 + 2|$ .
3. Riješiti jednačine: a)  $-5 + x = -3$ ;    b)  $-12 + (-5 - x) = 3$ .
4. Riješiti nejednačine i predstaviti rješenja na brojnoj pravoj:
- a)  $-2 - (x - 9) < -6$ ;    b)  $|x| \leq 2$ .
5. Koje cijele brojeve možemo dodati suprotnoj vrijednosti razlike brojeva  $-12$  i  $-5$  da se dobije broj koji nije veći od broja  $-3$  uvećanog za  $7$ ?
6. Ako je  $b$  broj koji se dobije kada se sabiju svi brojevi veći od  $-6$  i manji od  $3$  i važi  $-a - (-8 - (-a - (-6 - a))) = 25$ , izračunati  $b + a$ .

## II grupa

1. Pregled jutarnjih temperatura u gradovima u Crnoj Gori prikazan je tabelom.

Pljevlja	Žabljak	Budva	Podgorica	Bar	Berane	Bijelo Polje	Herceg Novi
$-6$	$-8$	$4$	$-1$	$6$	$-9$	$-3$	$5$

- a) U kom gradu je najniža temperatura?  
 b) U kojim gradovima je temperatura manja od nule?  
 c) Gdje je viša temperatura, u Žabljaku ili Beranama?  
 d) Koliko stepeni je razlika u temperaturi u Herceg Novom i Pljevljima?  
 e) U kom gradu je temperatura najudaljenija od nule?
2. Izračunati:
- a)  $5 - 8 - 5 - 3 - 11 + 9$ ;    b)  $-4 + (-3) + (-8) - 6 - (-1) + 7$ ;  
 c)  $(-3 + 8) - (-(-9 + 9 - 3))$ ;    d)  $|-2 + 3| - |-1 - 3|$ .
3. Riješiti jednačine: a)  $-10 + x = 12$ ;    b)  $-4 + (-4 - x) = 3$ .
4. Riješiti nejednačine i predstaviti rješenje na brojnoj pravoj:
- a)  $2 - (x + 9) \geq -10$ ;    b)  $|x| \geq 4$ .

5. Koje cijele brojeve treba oduzeti od apsolutne vrijednosti razlike brojeva  $-3$  i  $-11$  da se dobije broj koji nije manji od zbiru brojeva  $-29$  i  $33$ ?
6. Ako je  $b$  broj koji se dobije kada se sabiju svi cijeli brojevi veći od  $-6$  i manji od  $2$ , i važi  $-a - (-3 - (a + (-5 - a))) = 21$ , izračunati  $b - a$ .

Dragana Borović i Nataša Ostojić, JU OŠ „Njegoš”, Spuž

## VIII razred

### Razmjera, proporcija, procenat

1. Izračunati vrijednost izraza:  
a)  $\left(7\frac{5}{24} - \frac{3}{8} - 8,5\right) : 2\frac{7}{9}$ ;      b)  $5,6 - \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2}{3} \cdot 0,5\right) - \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ .
2. Riješiti jednačine: a)  $6,12 - x = 9\frac{3}{5}$ ;      b)  $\left(\frac{4}{5} - 3 \cdot x\right) - 1\frac{1}{2} = 2 : \frac{4}{3}$ .
3. Riješiti proporcije:  
a)  $\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right) : x = \left(1 - \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{7}{15} - \frac{1}{20}\right)$ ; b)  $\left(7 + \frac{6}{7}\right) : \left(3 - 1\frac{3}{4}\right) = x : \left(1 - \frac{3}{8}\right)$ .
4. Kopanje kanala pomoću 4 rovokopača trajalo je 8 dana. S koliko bi rovokopača isti kanal bio iskopan za 2 dana?
5. Osam radnika može popločati bazen za 9 dana. Nakon 3 dana zajedničkog rada 2 radnika su se razboljela. Za koliko će dana bazen biti popločan?
6. Obim pravougaonika iznosi  $80\text{ cm}$ , a dužine njegovih stranica se odnose kao  $5 : 3$ . Odrediti dužine stranica pravougaonika.
7. Dječak je prvog dana potrošio  $20\%$  svog novca i još 4 eura. Drugog dana je potrošio  $45\%$  ostatka novca i tako mu je ostalo 33 eura. Koliko je novca imao ovaj dječak?
8. Odrediti: a)  $25\%$  broja 364;      b) broj ako  $25\%$  tog broja iznosi 4,75;  
c) koliko procenata broja 25 čini broj 7?
9. Odrediti  $y$ , ako je  $x\%$  od  $y$  jednako 4 i  $x\%$  od  $x$  jednako je  $\frac{x}{5}$ .
10. Prodaja uglja na jednom stovarištu povećana je za  $30\%$  i iznosi  $16\,640\text{ t}$ . Za koliko tona je povećana prodaja?

### Prijedlog prvog pismenog zadatka

#### I grupa

1. Izračunati nepoznati član proporcije  $\left(2\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) : x = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : 3$ .
2. Odrediti a)  $25\%$  broja 250;      b) broj ako  $25\%$  tog broja iznosi 4,25;  
c) koliko procenata broja 25 čini broj 8?

3. Jedno odjeljenje osmog razreda, od 36 učenika, je odlučilo da na izlet putuje autobusom. Ako bi na izlet išli svi, cijena autobusa bi bila 8 € po člaku. Koliko će platiti svaki učenik ako su od izleta odustala 4 učenika?
4. Kristina je u petak pročitala 56 stranica knjige, a namjera joj je da preostalih 72% od ukupnog broja stranica, pročita za vikend. Koliko stranica ima knjiga?
5. Mladen je pošao da kupi patike. Cijena od 90 eura prvo je snižena za 30%, a zatim povećana za 10%. Koliko eura je Mladen trebao dati da bi kupio željeni model patika?

## II grupa

1. Izračunati nepoznati član proporcije  $(2,25 + 0,75) : x = \left(\frac{2}{3} - 0,5\right) : 3$ .
2. Odrediti:
  - a) 15% broja 250;
  - b) broj ako 15% tog broja iznosi 2,25;
  - c) koliko procenata broja 25 čini broj 7,5?
3. Poslije poskupljenja od 36% kaput je koštao 374 eura. Kolika je cijena kaputa bila prije poskupljenja?
4. Dva radnika su zaradila izvjesnu sumu novca. Blagajnica je greškom isplatila zarade u razmjeri 5 : 2, tako da je prvi radnik dobio 120 eura više od drugog. Po koliko eura bi trebalo da dobije svaki radnik, ako je pravedna raspodjela 3 : 4?
5. Roba je poskupila 10%, a poslije nekog vremena još 10%. Za koliko procenata je poskupila roba, u odnosu na prvobitnu cijenu?

Milan Rosandić, JU OŠ „21. maj“, Podgorica

## IX razred

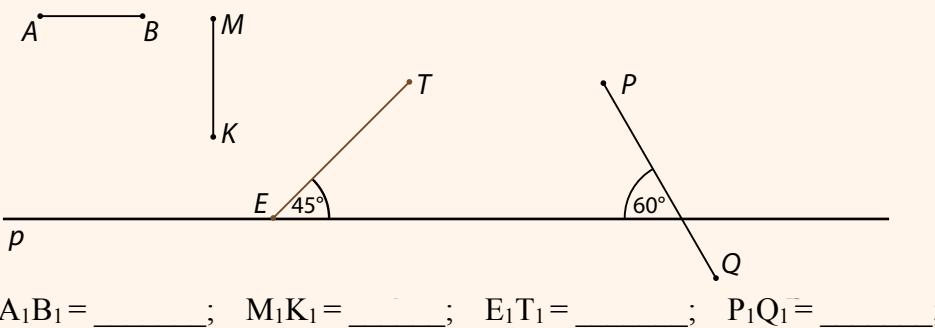
### Mnogougao. Tačka, prava i ravan

1. Izračunati: a) broj stranica, b) ukupan broj dijagonala, c) zbir unutrašnjih uglova, d) unutrašnji ugao, e) spoljašnji ugao, ako je broj dijagonala iz jednog tjemena pravilnog mnogougla 7.
2. Popuniti prazna polja:
  - a) Pravilni mnogougao, čiji je spoljašnji ugao  $\frac{1}{5}$  odgovarajućeg spoljašnjeg ugla, ima \_\_\_\_\_ stranica i \_\_\_\_\_ dijagonala.

## 26 Dijagonalala

---

- b) Pravilni mnogougao, čija najmanja dijagonalala sa stranicom mnogougla gradi ugao od  $18^\circ$ , ima \_\_\_\_\_ stranica i zbir unutrašnjih uglova \_\_\_\_  $^\circ$ .
3. Zbir svih unutrašnjih i spoljašnjih uglova pravilnog mnogougla je  $1800^\circ$ . Odrediti njegov obim ako je dužina stranice mnogougla  $5,4\text{ cm}$ .
  4. Broj dijagonala pravilnog mnogougla je za 25 veći od broja stranica, a njegov obim je  $70\text{ cm}$ . Odrediti dužinu stranice mnogougla.
  5. Ako se broj stranica mnogougla poveća za 4, onda se broj njegovih dijagonala poveća za 30. Koji je to mnogougao?
  6. Od 12 vitezova okruglog stola kralj Artur treba da izabere dva viteza, da izvrše jedan povjerljiv zadatak. Pošto je čuo da nijedan vitez ne govori sa svojim susjedima, odlučio je da odabrana dvojica ne budu susjedi.  
Na koliko načina može da izabere dva viteza?
  7. Nacrtati kvadar  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .
    - a) Odrediti odnos tačaka  $D$ ,  $B$  i  $A_1$  u odnosu na pravu  $p(A,B)$ ;
    - b) Odrediti odnos tačaka  $A$  i  $D_1$  prema ravni  $\pi(ABC)$ ;
    - c) Osjenčiti ravan određenu pravama  $p(B,C)$  i  $q(C,C_1)$ ;
    - d) Odrediti međusobni položaj pravih  $p(A,D)$  i  $q(B,B_1)$ ;
    - e) Odrediti međusobni položaj prave  $p(A,A_1)$  i ravni  $\pi(BCC_1)$ ;
    - f) Odrediti međusobni položaj ravni  $\pi(ABC)$  i  $\pi(A_1B_1C_1)$ .
  8. Tačke  $A, B, C$  pripadaju pravoj  $p$ , a tačka  $D$  ne pripada toj pravoj. Tačka  $S$  ne pripada ravni određenoj sa te četiri tačke. Nabrojati sve:
    - a) duži određene sa tih 5 tačaka;
    - b) prave određene tim tačkama;
    - c) sve ravni određene tim tačkama.
  9. Tačka  $A$  je od ravni  $\alpha$  udaljena  $3\text{ cm}$ , a tačka  $B$   $8\text{ cm}$ . Koliko je rastojanje tačaka  $A$  i  $B$  ako je dužina normalne projekcije duži  $AB$  na ravan  $\alpha$  jednako  $12\text{ cm}$  i ako su tačke  $A$  i  $B$  sa:
    - a) iste strane ravni  $\alpha$ ;
    - b) raznih strana ravni  $\alpha$ .
  10. Izračunati dužine projekcija datih duži na pravu  $p$ :



11. Tačka A pripada ravni  $\pi$ . Tačke M i N su jednakoudaljene od ravni  $\pi$ , a duž MN je na nju normalna. Izračunati dužinu duži AM i dužinu projekcije duži AN na ravan  $\pi$  ako je  $\Delta AMN$  jednakostranični, površine  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
12. Tjeme A kvadrata ABCD jeste normalna projekcija tačke E na ravan tog kvadrata. Izračunati dužinu normale AE ako je BE = 4 cm i CE = 5 cm.

### Prijedlog prvog pismenog zadatka

Zadatke rješavaj postupno. Bodovi se dodjeljuju na osnovu tačne postavke, postupka rješavanja i rezultata koji slijedi iz korektnog rada. <b>Želim ti puno uspjeha!</b>		Bodovi
I grupa	II grupa	
<b>1.</b> Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla je $170^\circ$ . Odrediti zbir unutrašnjih uglova i obim tog mnogougla ako je dužina stranice tog mnogougla $a = 4,5 \text{ cm}$ .	<b>1.</b> Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla je $162^\circ$ . Odrediti zbir unutrašnjih uglova i obim tog mnogougla ako je dužina stranice tog mnogougla $a = 3,2 \text{ cm}$ .	<b>10</b>
<b>2.</b> Nacrtati kvadar ABCDA <sub>1</sub> B <sub>1</sub> C <sub>1</sub> D <sub>1</sub> i odrediti: a) odnos tačaka B <sub>1</sub> i D prema ravni $\pi(BCB_1)$ ; b) ravan (imenovati/osjenčiti) određenu pravima $p(A_1, D_1)$ i $p(B_1, C_1)$ ; c) međusobni položaj ravni $\pi(ABC)$ i prave $p(A_1, B_1)$ ; d) ravni (imenovati) određene tjemenima tog kvadra koje su normalne na ravan $\pi(ADA_1)$ .	<b>2.</b> Nacrtati kocku ABCDA <sub>1</sub> B <sub>1</sub> C <sub>1</sub> D <sub>1</sub> i odrediti: a) odnos tačaka B <sub>1</sub> i D prema pravoj $p(C,D)$ ; b) ravan (imenovati/osjenčiti) određenu pravom $p(A,D)$ i tačkom A <sub>1</sub> ; c) međusobni položaj ravni $\pi(BCB_1)$ i $\pi(CDC_1)$ ; d) ravni (imenovati) određene tjemenima te kocke koje su normalne na pravu $p(B,B_1)$ .	<b>10</b>
<b>3.</b> Ortogonalna projekcija duži AB = 15 cm na ravan $\alpha$ je duž A <sub>1</sub> B <sub>1</sub> . Rastojanje tačke A od ravni $\alpha$ je 2 cm, a rastojanje tačke B je 11 cm. Odrediti dužinu duži A <sub>1</sub> B <sub>1</sub> , ako se tačke A i B nalaze sa različitim strana ravni $\alpha$ .	<b>3.</b> Ortogonalna projekcija duži AB = 15 cm na ravan $\alpha$ je duž A <sub>1</sub> B <sub>1</sub> . Rastojanje tačke A od ravni $\alpha$ je 2 cm, a rastojanje tačke B je 11 cm. Odrediti dužinu duži A <sub>1</sub> B <sub>1</sub> , ako se tačke A i B nalaze sa iste strane ravni $\alpha$ .	<b>12</b>
<b>4.</b> Zbir broja dijagonala i broja stranica mnogougla je 28. Koji mnogougao je u pitanju?	<b>4.</b> Razlika broja dijagonala i broja stranica mnogougla je 25. Koji mnogougao je u pitanju?	<b>14</b>
<b>5.</b> Tjeme C pravouglog trougla ABC sa pravim uglom kod tjemena C jeste normalna projekcija tačke D na ravan tog trougla. Izračunati dužinu hipotenuze AB ako je CD = 1 cm, DA = DB = 3 cm.	<b>5.</b> Tjeme C pravouglog trougla ABC sa pravim uglom kod tjemena C jeste normalna projekcija tačke D na ravan tog trougla. Izračunati dužinu hipotenuze AB ako je CD = 1 cm, DA = DB = 3 cm.	<b>14</b>

<b>Broj poena</b>	<b>0 – 17</b>	<b>18 – 29</b>	<b>30 – 41</b>	<b>42 – 54</b>	<b>55 - 60</b>
<b>OCJENA</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>

## ODABRANI ZADACI

### VI razred

- Od cifara 3, 4, 5 i 8 napisati sve trocifrene brojeve čije se cifre međusobno razlikuju, a koji su djeljivi sa 3.
- Broj 51 napisati u obliku zbiru dva broja tako da kada se veći broj podijeli manjim bude količnik 5 i ostatak 3.
- Odrediti najmanji četvorocifreni broj koji je djeljiv sa 9, a čiji je proizvod cifara 180.
- Broju 2023 dopisati sa lijeve i desne strane po jednu cifru tako da dati broj bude djeljiv sa 36. Odrediti sva rješenja.

### VII razred

- Nikola je napisao 2023 uzastopnih cijelih brojeva. Njihov zbir je 2023. Koji je najmanji, a koji najveći od datih brojeva?
- Dati su skupovi  $A = \{-3, -2, 1, 3, 5\}$  i  $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ . Uporediti broj elemenata skupova  $C = \{c \mid c = |a| + |b|, a \in A, b \in B\}$  i  $D = \{d \mid d = |a + b|, a \in A, b \in B\}$ .
- Riješiti jednačinu:  $||x + 5| - 5| = |-17 + 3 - 14|$ .
- Kada broj  $-7$  umanjimo za neki broj, pa od te razlike oduzmemos zbir brojeva  $-25$  i  $4$ , dobićemo broj ne manji od broja koji je suprotan razlici brojeva  $-2$  i  $10$ . O kom broju je riječ?

### VIII razred

- Izračunati vrijednost izraza:  $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$
- Svaki od prisutnih dječaka ima onoliko klikera koliko ima ukupno dječaka. Koliko dječaka je prisutno ako je izbrojano da svi zajedno imaju 2116 klikera?
- Četiri dana, četiri mačke ulove četiri miša. Za koliko će dana 50 mačaka uloviti 100 miševa?
- Omar i Martin prodaju jabuke. Omar je prodao za  $10\%$  manje jabuka od Martina, ali po cijeni koja je za  $10\%$  veća od Martinove. Ko je od ova dva prodavca više zaradio?

### IX razred

- Ako se broj stranica smanji za 3, onda se broj dijagonala smanji za 21. Koji je to mnogougaon?

2. Zbir jednog unutrašnjeg i dva spoljašnja ugla pravilnog mnogougla je  $216^\circ$ . Koliki je ukupan broj dijagonala tog mnogougla?
3. Tjeme D pravougaonika ABCD je normalna projekcija tačke M na ravan tog pravougaonika. Izračunati rastojanja tačke M do tjemena pravougaonika (A, B i C), ako je  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $AD = 5 \text{ cm}$  i  $DM = 12 \text{ cm}$ .
4. Tačka A je od ravni  $\alpha$  udaljena  $8 \text{ cm}$ , a tačka B  $3 \text{ cm}$ . Koliko je rastojanje između tačaka A i B ako je dužina normalne projekcije duži AB na ravan  $\alpha$  duž CD jednaka  $12 \text{ cm}$ ? Odrediti sva rješenja.

**Tanja Rakočević, OŠ „Marko Miljanov”, Podgorica**

## TAKMIČARSKI ZADACI

### VI razred

1. Prodavac jabuka je računao koliko jabuka ima u korpi: „Ako ih brojim po dvije, po tri, po četiri, po pet ili po šest, uvek mi ostane jedna. Ali ako ih izbrojim po sedam ne ostane mi nijedna.“ Koji je najmanji broj jabuka koji zadovoljava navedene uslove?
2. Odrediti sve trocifrene brojeve takve da su i oni i zbir njihovih cifara djeljivi sa 15.

### VII razred

1. Ako su  $a$ ,  $b$  i  $c$  cijeli brojevi i ako je  $a \cdot b = -6$ ,  $a \cdot c = -10$  i  $b \cdot c = 15$  izračunati  $a \cdot b \cdot c$  i  $a$ ,  $b$  i  $c$ .
2. Da li se u kvadrat  $3 \times 3$  mogu upisati brojevi iz skupa  $\{-1, 0, 1\}$  tako da zbroji brojeva po kolonama, vrstama i dijagonalama budu različiti (svaka dva)?

### VIII razred

1. Koliko ima brojeva manjih od 1000 koje se završavaju cifrom 3 i jednaki su zbiru kvadrata dva prosta broja?
2. Na košarkaškom turniru svaka ekipa odigrala je sa svakom od ostalih ekipa po jednu utakmicu. Na kraju turnira ispostavilo se da je 90% ekipa postiglo bar po jednu pobjedu. Koliko ekipa je učestvovalo na turniru? (Nije bilo neriješenih rezultata.)

## IX razred

- Kada se broj koji predstavlja zbir uglova u mnogouglu pomnoži sa brojem dijagonala tog mnogougla dobije se broj 21600. Koliko stranica ima taj mnogougao?
- Projekcija duži  $AB = 17 \text{ cm}$  na ravan  $\alpha$  je duž  $CD = 8 \text{ cm}$ . Izračunati rastojanja tačaka A i B od ravni  $\alpha$ , ako je poznato da se ta rastojanja odnose kao  $AC : BD = 3 : 2$ .

Tanja Rakočević, OŠ „Marko Miljanov”, Podgorica

### RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

## VI razred

- Četiri gusara su zaplijenili kutiju sa zlatnicima. Najjači je uzeo 33 zlatnika, a trojica su podijelili ostale zlatnike, srazmjerne svojoj snazi. Tada je vođa naredio da najjači svakom od ostalih gusara da onoliko zlatnika koliko ih oni već imaju. Sada je drugi imao najviše, pa je morao po naređenju ostaloj trojici dati onoliko zlatnika koliko ih svaki već ima. Zatim je tako morao postupiti treći, pa četvrti. Poslije toga se ispostavilo da svi imaju isti broj zlatnika. Koliko je svaki gusar prigrabio na početku?

**Rješenje:** Računamo unazad! Na kraju su svi imali po  $x$  zlatnika. Prije nego što je četvrti gusar podijelio zlatnike ostalim, imali su: prvi  $\frac{x}{2}$ , drugi  $\frac{x}{2}$ , treći  $\frac{x}{2}$  i četvrti  $\frac{5x}{2}$ . Prije nego što je treći podijelio svoje zlatnike imali su: prvi  $\frac{x}{4}$ , drugi  $\frac{x}{4}$ , treći  $\frac{9x}{4}$  i četvrti  $\frac{5x}{4}$ , itd. Prije nego što je prvi podijelio svoje zlatnike imali su: prvi  $\frac{33x}{16}$ , drugi  $\frac{17x}{16}$ , treći  $\frac{9x}{16}$  i četvrti  $\frac{15x}{16}$ . Dakle  $x = 16$ , pa su na početku imali: prvi 33 zlatnika, drugi 17, treći 9 i četvrti 5.

- Dokazati da je  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ , a zatim izračunati:

a)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100};$   
 b)  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}.$

**Rješenje:**  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ . Koristeći se ovom jednakošću, izračunaćemo izraze a) i b).

a)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100} = \\ & = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ & = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} = \\ & = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} = \\ & = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \\ & = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{5}{20} - \frac{2}{20} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

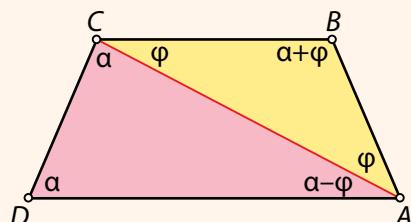
## VII razred

- Na koliko načina 6 osoba mogu istovremeno da se smjeste na 6 od 9 pričvršćenih i numerisanih stolica?

**Rješenje:** Prva osoba ima 9 mogućnosti. Kada ona zauzme jednu stolicu, drugoj osobi preostaju 8 mogućnosti, itd. Ukupan broj mogućnosti je:  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$ .

- Jednakokraki trapez ABCD, gdje je  $AD \parallel BC$  i  $BC < AD$ , dijagonalom AC podijeljen je na dva jednakokraka trougla. Izračunati uglove trapeza.

**Rješenje:** Dijagonala AC je osnovica jednakokrakog trougla ABC, a krak jednakokrakog trougla ACD, (vidi sliku). Ako jednake uglove trapeza kod tjemena A i D označimo sa  $\alpha$ , onda su uglovi jednakokrakih trouglova kao na slici. Dobijamo jednakosti  $3\alpha - \varphi = 180^\circ$  i  $3\varphi + \alpha = 180^\circ$ . Odavde dobijamo  $\alpha = 72^\circ$ , pa su uglovi trapeza:  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $108^\circ$  i  $72^\circ$ .



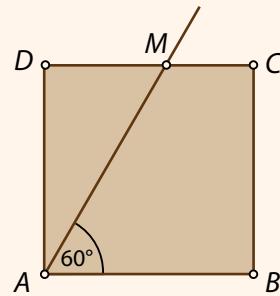
## VIII razred

1. Prava dijeli kvadrat tako da u tjemenu kvadrata obrazuje sa stranicom ugao od  $60^\circ$ . Izračunati površinu većeg dijela kvadrata ako je  $a = 3\text{ cm}$ .

**Rješenje:**

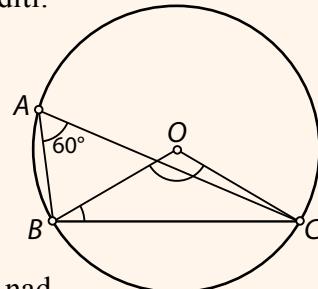
Trougao AMD je pravougli i  $\angle AMD = 60^\circ$ . Ako u trouglu AMD označimo  $AM = x$ , onda je  $DM = \frac{x}{2}$  i  $AD = a = 3\text{ cm}$ . Primjenjujući Pitagorinu teoremu na pravougli trougao AMD dobijamo  $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + a^2$ , odakle se dobija da je  $x^2 = 12$ , odnosno  $x = 2\sqrt{3}$ , pa je  $DM = \frac{x}{2} = \sqrt{3}$  i  $CM = 3 - \sqrt{3}$ . Kako je veći dio kvadrata pravougli trapez, to njegovu površinu računamo:

$$P = \frac{AB+CM}{2} \cdot BC = \frac{3+3-\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{6-\sqrt{3}}{2} \cdot 3.$$



2. Ugao između dvije tetine AB i AC jednog kruga je  $60^\circ$ . Ako je poluprečnik tog kruga  $r = 6\text{ cm}$  i tačka O njegov centar, odrediti:

- Ugao  $\angle BOC$ ;
- Ugao  $\angle OBC$ ;
- Dužinu tetine BC.



**Rješenje:**

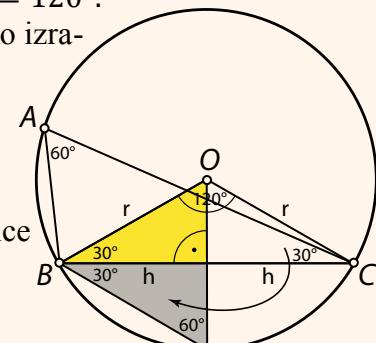
Najprije uočimo da je  $\angle BAC = 60^\circ$  periferijski nad lukom BC. Njemu odgovarajući centralni ugao  $BOC$  mora biti dva puta veći:  $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 120^\circ$ . Kako je trougao BOC jednakokraki, možemo izračunati i njegova dva preostala ugla:

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Dužina tetine BC je u stvari sastavljena od dvije visine jednakostraničnog trougla stranice

$$a = r = 6\text{ cm}, h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BC = 2h = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} =$$

$$r\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\text{ cm}.$$



## IX razred

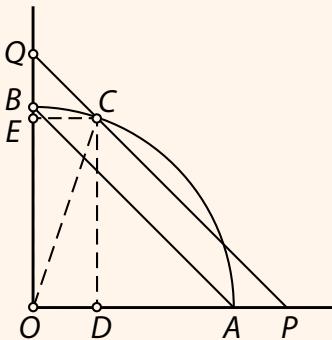
1. Data je četvrtina kruga određena međusobno normalnim poluprečnicima  $OA$  i  $OB$ . Prava  $p$  paralelna sa tetivom  $AB$  siječe luk  $AB$  u tački  $C$  (tačka  $C$  je jedna od dvije presječne tačke), a produžetke duži  $OA$  i  $OB$  u tačkama  $P$  i  $Q$ . Dokazati da je  $AB^2 = PC^2 + QC^2$ .

**Rješenje:**

Neka su  $D$  i  $E$  podnožja normala iz tačke  $C$  redom na  $OA$  i  $OB$  i neka je  $OA = OB = OC = r$  (vidi sliku). Tada je  $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$ , pa je zbog paralelnosti duži  $AB$  i  $PQ$  i  $\angle OPQ = \angle OQP = 45^\circ$ .

Zato je  $PC^2 = 2CD^2$  i  $CQ^2 = 2CE^2$ .

$$\text{Tada je: } PC^2 + QC^2 = 2CD^2 + 2CE^2 = 2 \cdot (CD^2 + CE^2) = 2OC^2 = 2r^2 = AB^2.$$



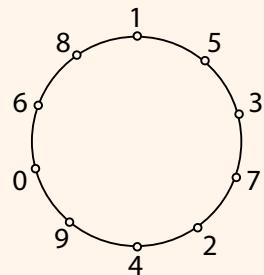
2. Po krugu treba rasporediti cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Da li je moguće napraviti takav raspored da zbir svake tri uzastopne cifre:

(a) nije veći od 14; (b) nije veći od 15?

Ako je moguće, navesti po jedan primjer takvih rasporeda.

**Rješenje:**

Neka je moguće napraviti raspored tako da zbir svaka tri uzastopna broja nije veći od  $k$ . Neka su u tom slučaju date cifre raspoređene na sledeći način:  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ . Tada je očigledno  $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) \leq 3k$ , a odavde je  $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + a_{10} \leq 3k + a_{10}$ .



Kako je lijeva strana prethodne nejednakosti jednaka 45 to je  $45 \leq 3k + a_{10}$ . Dobijeni uslov mora da važi za svaku cifru pa i za  $a_{10} = 0$ , pa je  $k \geq 15$ . Prema tome, uslov (a) nije moguć, a uslov (b) je moguć i jedan takav primjer dat je na slici.

**Siniša Krivokapić i Ana Tomašević,  
JU OŠ „Dašo Pavičić“, Herceg Novi**

## PRIPREMA ZA ČAS

<b>Škola</b>	JU OŠ "Pavle Rovinski"
<b>Nastavnik/ca:</b>	Zorka Ćetković
<b>Predmet:</b>	Matematika
<b>Razred:</b>	VI
<b>Tema:</b>	Djeljivost brojeva
<b>Nastavna jedinica:</b>	Prosti i složeni brojevi. Uzajamno prosti brojevi
<b>Oblik rada:</b>	Frontalni, individualni, grupni
<b>Tip časa</b>	Obrada nastavnog gradiva
<b>Nastavne metode</b>	Monološka, dijaloška
<b>Nastavna sredstva</b>	Računar, pptx prezentacija, nastavni listići, tabla, kreda
<b>Ishodi učenja:</b>	<p>Na kraju učenja učenici će moći da:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Usvajaju i upotrebljavaju pojmove broj je prost i broj je složen</li> <li>– Utvrđuju da li je dati broj prost ili složen</li> <li>– Nalaze proste brojeve u datom skupu brojeva</li> <li>– Utvrđuju da li su dva data broja uzajamno prosta</li> </ul>
<b>Aktivnost učenika:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– prate prezentovani materijal i zapisuju bilješke</li> <li>– komentarišu i odgovaraju na postavljena pitanja nastavnice tokom prezentacije</li> <li>– rade nastavni listić samostalno, a potom provjeravaju rješenja sa nastavnicom</li> <li>– rezimiraju naučeno gradivo igranjem kviza kahoot!</li> <li>– bilježe domaći zadatak koji treba uraditi za sljedeći čas</li> </ul>
<b>Uvodni dio</b> (do 5 min):	
Obnoviti pojmove biti djelilac i je djeljivo uvodnim zadatkom.	
<b>Glavni dio časa</b> (oko 30 min):	
Realizovati pripremljenu prezentaciju, gdje se uz aktivnost i postavljanje pitanja učenicima prati njihov fokus. Potom se prelazi na samostalno rješavanje datih zadataka, koji se kasnije komentarišu uz pomoć nastavnice.	
<b>Završni dio časa</b> (oko 10 min):	
Ponoviti ono što je rađeno tokom časa igrajući kviz kahoot, gdje se učenici dijele u grupe (najviše 5 grupa).	
Zadavanje domaćeg zadatka.	

## PRILOZI

### Pregled prezentacije

**Primjer 1:** Naći sve djelioce brojeva: 8, 16, 2, 7, 11, 25, 1, 36.

Koji od datih brojeva imaju tačno dva djelioca, koji više od dva djelioca, a koji tačno jedan djelilac?

Prema broju djelilaca prirodne brojeve dijelimo u tri grupe: brojevi koji imaju samo dva djeliloca (2, 7, 11), brojevi koji imaju više od dva djelioca (8, 16, 25, 36), brojevi koji imaju tačno jedan djelilac (1).

**Prirodan broj koji ima samo dva djelioca, broj 1 i samog sebe, je prost broj.**

**Prirodan broj koji ima više od dva djelioca je složen broj.**

**Broj 1 nije ni prost ni složen!**

Kako prepoznati prost broj?

- Za nalaženje prostih brojeva, grčki matematičar Eratosten (III vijek p.n.e) koristio je sljedeći način. On je zapisao sve prirodne brojeve od 1 pa do broja  $n$ ,  $n \in N$ .
- Zatim je počeo da isključuje (precrtava) brojeve. Prvo je precrtao broj 1 koji nije ni prost ni složen. Zatim je precrtao sve brojeve poslije 2 koji su djeljivi sa brojem 2 (4, 6, 8, 10,...). Prvi broj koji ostaje poslije broja 2 je broj 3. Dalje je precrtao sve brojeve poslije broja 3 koji su djeljivi sa 3 (6, 9, 12, 15,...).
- Nastavljajući ovaj proces na kraju će ostati neprecrtani samo prosti brojevi. Ovaj postupak se naziva **Eratostenovo sito**.

**Primjer 2:** Naći sve proste brojeve od 1 do 100.

**Primjer 3:** Navesti sve proste brojeve koji se nalaze između 50 i 60.

**Uzajamno prosti brojevi:**

**Za dva prirodna broja kažemo da su uzajamno prosti ako je njihov jedini zajednički djelilac broj 1.**

Možemo zaključiti da su i svaka dva prosta broja i uzajamno prosta, dok obrnuto ne važi.

Pokazaćemo samo jedan smjer.

Neka su  $p$  i  $k$  prosti brojevi. Tada su njihovi jedini djelioci:  $D_p = \{1, p\}$  i  $D_k = \{1, k\}$ . Jasno je, da je za ovaj par brojeva jedini zajednički djelilac broj 1, te su ovi prosti brojevi  $p$  i  $k$  ujedno i uzajamno prosti.

**NASTAVNI LISTIĆ**

- 1) Napisati sve djelioce broja:  
a) 24; b) 30, pa među njima zaokružiti proste brojeve.
- 2) Napisati sve proste brojeve koji se nalaze u četvrtoj desetici.
- 3) a) Može li razlika dva neparna broja biti prost broj?  
b) Da li je proizvod dva prosta broja prost ili složen broj?  
c) Može li obim jednakostraničnog trougla biti prost broj?
- 4) Da li su dati parovi brojeva:  
a) 4 i 5;      b) 15 i 8;      c) 12 i 8 uzajamno prosti ?

**KVIZ (kahot.com)**

Pravila kviza!

- Odjeljenje se dijeli u pet ekipa. Svaka ekipa ima svoje ime.
- U svakoj ekipi treba ravnopravno rasporediti učenike po znanju.
- Svaka ekipa treba da ima po jedan mobilni (smartphone) telefon sa koga se pristupa kvizu preko adrese kahot.it sa dobijenim pinom.
- Kada se pročita pitanje ili zadatak ili nedovršena rečenica sa kviza, treba dati 1 odgovor od ponuđena 4.
- Za svako pitanje, od ukupno 10, imate 30 sekundi da razmislite.
- Ekipa sa najviše osvojenih bodova je pobjednik.

**1. Prost broj je...**

- a) Broj koji nema nijednog djelioca b) Broj koji ima više od dva djelioca  
c) Broj čiji je djelilac on sam i broj 1 d) Broj 1.

**2. Najmanji prost broj je...**

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 0.

**3. Koje od navedenih tvrdjenja je tačno?**

- a) Zbir dva neparna broja je prost broj.  
b) Proizvod dva prosta broja je prost broj.  
c) Zbir dva prosta broja koja su veća od 2 je paran broj.  
d) Prosti brojevi su neparni brojevi.

**4. Izbaciti uljeza:**

- a) 2      b) 5      c) 16      d) 11.

**5. Koji od navedenih brojeva je složen broj?**

- a) 3      b) 29      c) 11      d) 21.

**6. Za koje vrijednosti prirodnog broja  $k$  je broj  $7 \cdot k$  prost?**

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4.

**7. Dopuni niz složenih brojeva 4. desetice: 32, \_\_, \_\_, 35, 36, \_\_, \_\_, 40.**

- a) 33, 34, 37, 39      b) 33, 34, 38, 39  
c) 34, 37, 38, 39      d) 33, 37, 38, 39.

**8. Koji jedini zajednički djelilac imaju uzajamno prosti brojevi?**

- a) 1      b) 2      c) 3      d) samog sebe.

**9. Koji od datih parova brojeva su uzajamno prosti?**

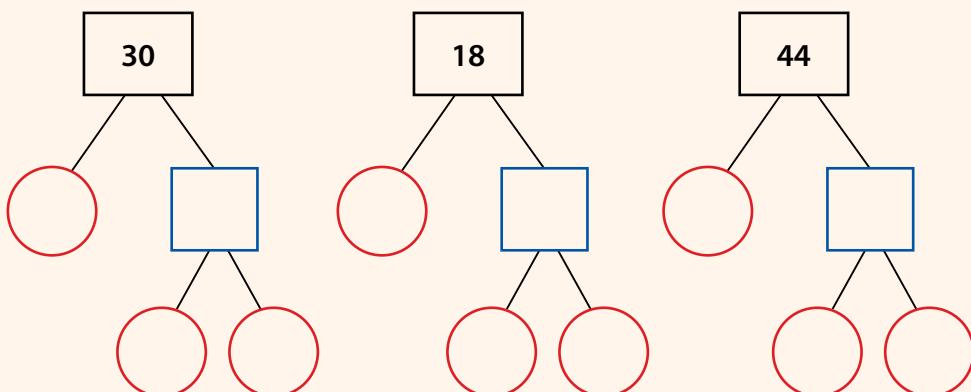
- a) 12 i 10    b) 3 i 2    c) 15 i 18    d) 7 i 8.

**10. Koje od navedenih tvrđenja je netačno?**

- a) Dva različita prosta broja su uzajamno prosta.  
b) Dva parna broja ne mogu biti uzajamno prosta.  
c) Paran i neparan broj su uvijek uzajamno prosti.  
d) Dva uzastopna broja su uzajamno prosta.

## DOMAĆI ZADATAK

- a) Popuniti listu prostih brojeva: 2, 3, \_\_, \_\_, 11, \_\_, 17, 19.  
 b) Napisati sve proste brojeve treće desetice.  
 c) Izdvojiti sve proste brojeve iz skupa {15, 3, 29, 35, 51, 61, 19}.
- Vanja je odabrala prost broj koji je veći od 30 a manji od 40. Ako se cifre tog broja sabiju, daju zbir 10. Na koji to broj Vanja misli?
- Popuniti drvo tako što ćeš izraziti date brojeve kao proizvode prostih činilaca. (Prosti brojevi treba da budu u crvenim krugovima, složeni brojevi treba da budu u plavim kvadratićima).



## ZANIMLJIVOSTI

### Prost broj od 17 miliona cifara

Grupa američkih istraživača uspjela je da pronađe najduži prost broj koji se sastoji od 17 miliona cifara. Naime, Kertis Kuper i njegov tim sa Univerzitetom u Misuriju uspjeli su da dođu do broja koji sadrži 17 425 170 cifara, što na papiru predstavlja više od 4 000 ispisanih stranica formata A4.

### Vampiri među brojevima

Pojam vampirskih brojeva, 1994. godine je uveo Clifford A. Pickover. Vampirski broj je složeni prirodni broj sa  $n$  cifara, koji se može napisati kao proizvod dva broja od kojih svaki ima  $n/2$  cifara. On sadrži sve cifre ta dva broja bez obzira na njihov redoslijed.

$$\text{Primjeri: } 1260 = 21 \cdot 60; \quad 126\,000 = 210 \cdot 600; \quad 1\,230 = 31 \cdot 30.$$

### Zašto slovo $x$ označava nepoznatu?

Arapski jezik je logičan jezik jer je svaki dio precizan i nosi mnoštvo informacija. Sistem koji se na arapskom zove al-jebra, preveden je kao *sistem za usklađivanje nespojivih djelova*, a vremenom je u engleski preveden kao algebra.

Arapski tekstovi su dospjeli u Španiju u 11. i 12. vijeku, nakon čega je bilo veliko interesovanje za prevod tih pisanja. Jedan od problema bio je što se neki glasovi u arapskom nijesu mogli prikazati slovima koja su postojala u španskem niti bilo kom drugom evropskom jeziku. Recimo prvo slovo riječi shalan (koje zvuči kao šalan), koja znači *nešto* - neku nepoznatu stvar, bilo je problematično za prevod. U arapskom dodavanjem člana *al*, riječ al-shalan znači *baš ta nepoznata stvar*. Ta riječ se pojavljuje kroz cijelu prvobitnu matematiku.

Srednjovjekovni španski učenjaci, kojima je bio dodijeljen zadatak prevođenja arapskih tekstova, riješili su problem dogovorom, tako što su problematično slovo zamijenili slovom pozajmljenim od Starih Grka. Kasnije kad se ovaj materijal prevodio na latinski, to grčko slovo zamijenjeno je latinskim *x*. Nakon toga je to slovo postalo dio svih matematičkih udžbenika u razdoblju od gotovo 600 godina.

## MATEMATIČKI SIMBOLI – kratka istorija

**V**ećina danas poznatih matematičkih simbola je nastala u XVI vijeku. Prije toga matematički simboli su pisani riječima, što je bilo veoma teško za čitanje i tumačenje. Da nema opšte prihvaćenih matematičkih simbola, u matematici bi umjesto njih danas imali redove slova i prilično duge tekstove.

**Simbol jednakosti** („=“), danas je svuda prihvaćen i skoro da nema matematičkog zadatka u kome se ne koristi. Njegov idejni tvorac – veliki doktor i matematičar Robert Recorde (1510 – 1548.) je bio prilično opterećen da stalno piše *je jednak* (*is equal to*) u raznim zadacima, jer mu je taj postupak bio naporan i dosadan. Ovaj matematičar koji je živio u 16. vijeku, osim znaka za jednakost nije ostavio nikakvo drugo matematičko nasleđe.

Rekorda je nervirala činjenica da, svaki put kada treba da napiše jednačinu, mora da napiše slovima *jednako je*, pa je odlučio da riječi zamijeni simbolom „=“, kojeg je zvao *blizanački*, zbog dvije identične paralelne prave koje stoje jedna iznad druge. Interesantno je da simbol nije odmah prihvaćen. Sve do sredine 18. vijeka matematičari su koristili razne simbole između ostalog i „||“, a najčešće je jednakost izražavana riječima.

Prvo djelo u kome je Robert predstavio znak „=“ bilo je *The Whetstone of Witte*, objavljeno 1557. godine. Djelo je značajno i po tome što se u njemu prvi put na engleskom govornom području objašnjavaju i koriste i simboli „+“ i „–“.

Postoji nekoliko simbola koji se koriste u algebri da označe **jednako po definiciji**, kao što su  $(: =)$  i  $(\equiv)$ . Jednako po definiciji, prvi se put se pojavljuje u djelu *Logica Mathematica* autora Cesare Burali-Forti. Ovaj italijanski matematičar koji je živio od 1861. do 1931. godine je koristio simbol  $(= \text{Def})$ .

Znak za *nije jednak* ( $\neq$ ) u današnjem obliku prvi je koristio Leonhard Euler, švajcarski matematičar koji je živio od 1707. do 1783. godine.

Znakovi nejednakosti veći od ( $>$ ) i manji od ( $<$ ) uvedeni su 1631. u *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas*, djelu britanskog matematičara Thomasa Harriota, objavljenom 10 godina nakon njegove smrti - 1621. godine. Simbole je zapravo izmislio urednik knjige. Naime, Harriot je u početku koristio trouglaste simbole koje je urednik izmijenio. U svom djelu Harriot je upotrijebio dvije uspravne paralelne crte za označavanje jednakosti (II).

Simbole za manje ili jednak ( $\leq$ ) i veće ili jednak ( $\geq$ ) u današnjem obliku prvi je upotrijebio 1734. francuski matematičar Pierre Bouguer. John Wallis, britanski logičar i matematičar, koristio je slične simbole 1670. godine, s tim da je Wallis koristio liniju iznad simbola za manje odnosno veće.

**Simboli za sabiranje** (+) i **oduzimanje** (–) koriste se već hiljadama godina. Početkom 15. vijeka, Evropljani su počeli da koriste slova p i m za plus i minus („piu“ i „memo“). Znaci za plus (+) i minus (–) koriste se još od 1489. godine. Astronomu Nikoli Orezmu, koji je živio u 14. vijeku, pripisuje se prva upotreba riječi plus. Znak minus pripisuje se trgovcima koji su iskrcavali teret s brodova, a može se smatrati kao skraćenica slova m, koje je označavalo oduzimanje. Upotreba ovih znakova kao simbola algebarskih operacija prvi put se javlja u radovima holandskog matematičara Vandera Hekea iz 1514. godine.

## **SPISAK PRVIH 5 UČENIKA KOJI SU TAČNO RIJEŠILI NAGRADNI ZADATAK SA NASLOVNE STRANE IZ PROŠLOG BROJA DIJAGONALE:**

1. Luka Božović, JU OŠ „21. maj“ Podgorica
2. Nađa Marojević, VII-1, JU OŠ „Milija Nikčević“ Nikšić
3. Marija Mia Maraš, JU OŠ „Milan Vukotić“ Golubovci, Zeta
4. Nikola Milićević, IX-5, JU OŠ „Vuk Karadžić“ Berane
5. Dajana Međedović IX-1, JU OŠ „Radojica Perović“ Podgorica

**Redakcija časopisa sve njih nagrađuje besplatnim primjerkom nove Dijagonale.**

**Štampanje ovog broja pomogli su:**



DOMEN d.o.o.  
PODGORICA



**Imate prijatelje!**

MTEL d.o.o. – PODGORICA



**BEMAX**

BEMAX d.o.o.  
PODGORICA

**HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!**

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale“ će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.

Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**“ i „**Narodnoj knjizi**“. Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **510-206991-61** kod CKB banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: [udruznaastmatem@gmail.com](mailto:udruznaastmatem@gmail.com)

[www.unmcg.wordpress.com](http://www.unmcg.wordpress.com)

CIP - Каталогизација у публикацији  
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonalala  
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536-5851

