



Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola

Cijena 1,50 €

NAGRADNI ZADATAK

Nastaviti niz
 $3 \times 5 = 24,$
 $2 \times 4 = 12,$
 $5 \times 6 = 55,$
 $3 \times 2 = ?$

2024
HAPPY NEW YEAR
3

BROJ 22 - GODINA 2023.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „Dijagonala“, broj 22
Godina 2023.

Cijena: 1,50 €

Glavni urednik: mr Radomir Božović

Odgovorni urednik: Danijela Jovanović

Redakcija: Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović,
Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Anđa Vujović,
Milan Rosandić, Nikola Radojičić, Irena Pavićević,
Nevena Ljujić

Lektura: Milja Božović, prof.

Korektura: Danijela Jovanović, prof.

Priprema za štampu: Branko Gazdić

Tiraž: 1000

Štampa: „Studio Branko“ d.o.o. – Podgorica

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio
časopis „Dijagonala“ za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Sadržaj

Metod invarijanti	3
Rad sa vektorima	8
Zadaci za vježbu	12
Odabrani zadaci	21
Takmičarski zadaci	23
Rješenja takmičarskih zadataka iz prošlog broja	24
Priprema za čas	27
Hajdelberg laureat forum	28
Galileo Galilej	31
Matematički sofizmi	34

Dr Radoje Šćepanović

METOD INVARIJANTI

Metod invarijanti spada u nestandardne metode rješavanja zadataka. Ovaj metod počiva na otkrivanju neke osobine, svojstva, nejednakosti i sl. koja dovodi do brzeg rješenja zadatka. Rješavanje zadatka možemo uporediti sa traženjem miša u gomili kamenja. Jedan način bi bio da sa gomile uklanjamo jedan po jedan kamen sve dok se ne pojavi miš. Ovaj postupak može trajati dugo. Drugi način je da uočimo repić miša i slijedimo za njim dok ga ne uhvatimo. Zapravo, otkrivamo neko svojstvo koje dovodi do brzog rješavanja zadatka.

Na početku pitanje: šta je to invarijanta? Invarijanta je veličina koja se ne mijenja u rezultatu nekih radnji u zadatku. Na primjer, kod razrezivanja figura i premještanja dobijenih djelova, ne mijenja se površina figure. Invarijanta može biti broj, izbor brojeva, parnost broja i sl.

Invarijante se, obično, koriste za dokazivanje nemogućnosti da se dobije neka varijanta u zadatku.

1. Luka je na pismenoj vježbi iz matematike dobio „1”. Želeći da to sakrije od svoje majke on je list, na kojoj je rađena pismena vježba, pocijepao na 5 djelova. To mu je bilo malo, pa je neke od tih djelova (možda ne sve) ponovo pocijepao na 5 djelova, i nastavio tako. Majka je našla 28 komadića od pismene vježbe. Da li je našla sve djelove?

Rješenje: Ne. Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje moramo znati: Koliko se komadića papira moglo dobiti? U početku je Luka list pocijepao na 5 djelova. Ako je pocijepao jedan od tih djelova na 5 djelova, tada se broj djelova uvećao za 4, tj. bio je $9 (= 5 + 4)$. Ako je nastavio da i dalje cijepa na po 5 djelova, tada bi dobijao: $9 + 4 = 13$, $13 + 4 = 17$, $17 + 4 = 21$, $21 + 4 = 25$, $25 + 4 = 29$, $29 + 4 = 33, \dots$ djelova. Uočimo da broj djelova, poslije svakog cijepanja, pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1. Ovo je invarijanta u zadatku. Kako broj 28 pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0, to majka nije našla sve djelove pocijepane pismene vježbe.

Napomena: Zaključak važi i u slučaju kada se umjesto 28 uzme bilo koji prirodni broj koji pri dijeljenju sa 4 ne daje ostatak 1. To su brojevi oblika $4k$, $4k+2$, $4k+3$ gdje je k prirodan broj.

2. Na stolu se nalazi 6 čaša, od kojih je 5 postavljeno pravilno, a jedna nepravilno (prevrnuta sa dnem na gore). Dozvoljeno je istovremeno prevrnuti 4

čaše. Da li se na ovaj način može dobiti da sve čaše budu pravilno postavljene?

Rješenje: Ne. Uočimo da je na početku broj prevrnutih čaša neparan (1). Prevrnimo 4 čaše. Ako su prevrнуте 4 pravilno postavljene čaše, broj nepravilno postavljenih čaša će biti 5 (neparan broj). Ako su prevrнуте 3 pravilno postavljene čaše i jedna nepravilno, broj nepravilno postavljenih čaša će biti 3 (neparan broj). Nastavimo ovaj postupak. Pratimo kako se mijenja broj nepravilno postavljenih čaša. Pravilno postavljenu čašu označimo sa P, a nepravilno sa N. Svako izdvajanje 4 čaše možemo opisati na sljedeći način: PPPP, PPPN, PPNN, PN NN, NN NN. U prvom slučaju prevrнуте su 4 pravilno postavljene čaše, pa se broj nepravilno postavljenih čaša uvećao za 4. U drugom slučaju se broj nepravilno postavljenih čaša uvećao za 2 (jer se broj pravilno postavljenih čaša povećao za 1). U trećem slučaju se broj pravilno postavljениh čaša nije uvećao (0) (jer su dvije čaše pravilno, a dvije nepravilno postavljene). U četvrtom slučaju se broj nepravilno postavljenih čaša smanjio za 4. U svim slučajevima se broj nepravilno postavljenih čaša mijenjao paran broj puta (0, 2, 4). Kako je u početku broj nepravilno postavljenih čaša bio neparan, to je u svakom prevrtanju čaša na stolu bio neparan broj pravilno postavljenih čaša. Ovo je invarijanta u zadatku. Slijedi, na stolu se, koliko god puta prevrtili čaše, neće desiti da sve čaše budu pravilno postavljene.

3. U deset posuda se nalazi 1 l, 2 l, 3 l, ..., 10 l vode. Dozvoljeno je iz suda A u sud B presuti onoliko vode koliko ima u B. Može li se, poslije više ovakvih presipanja, dobiti da u 5 posuda bude po 3 l vode, a u preostalih 5: 6 l, 7 l, 8 l, 9 l, 10 l?

Rješenje: Ne. Pri svakom presipanju broj neparnih posuda (posude sa neparnim brojem litara vode) se ne uvećava. Broj takvih posuda se umanjuje pri prelivanju iz neparne posude u neparnu, a u ostalim slučajevima se ne mijenja. Slijedi, prelazak 1, 2, 3, 4, ..., 10 u 3, 3, 3, 3, 3, 6, 7, 8, 9, 10 nije moguć, jer se broj neparnih posuda ne uvećava.

4. U garderobi škole nalazi se 20 jakni. Sedamnaest učenica, po redu, prilazi garderobi i uzima ili ostavlja jaknu. Može li poslije odlaska učenica na vješalici ostati 10 jakni?

Rješenje: Ne. Poslije dolaska prve učenice, u garderobi je ostalo 19 ili 21 jakni (neparan broj); poslije dolaska druge učenice u garderobi je ostalo 18, 20 ili 22 jakne (paran broj); poslije dolaska treće učenice: 17, 21, 23, 19 jakni (neparan broj). Poslije dolaska sedamnaeste učenice u garderobi

je ostao neparan broj jakni. Dakle, u garderobi ne može biti paran broj jakni (10).

5. Na tabli su napisani brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dozvoljeno je izabrati bilo koja dva broja i dodati im po 1. Da li se, ponavljajući ovaj postupak, može dobiti da svi brojevi na tabli budu jednaki?

Rješenje: Ne. Zbir brojeva napisanih na tabli je 21. Dozvoljenom radnjom dodavanja broja 1 taj zbir se uvećava za 2, ali se parnost zbira ne mijenja (invarijanta), tj. stalno je neparan. Na tabli se neće naći da svih 6 brojeva budu jednaki, jer je njihov zbir paran broj.

6. Koristeći cifre 2, 3, 4, ..., 9 zapisana su dva prirodna broja. Svaka cifra je korišćena samo jednom. Može li jedan od tih brojeva biti dva puta veći od drugog?

Rješenje: Ne. Razmotrimo situaciju da može. Neka su dobijeni brojevi: a i $b = 2a$. Označimo sa $S(a)$ i $S(b)$ zbiroke njihovih cifara. Znamo da brojevi n i $S(n)$ imaju jednakost ostatke pri dijeljenju sa 3. Kako je $a + b = 3a$ djeljiv sa 3, to je i zbir $S = S(a) + S(b)$ djeljiv sa 3, što nije tačno, jer je $S = 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = 44$.

7. Na listu papira napisan je broj 9. Dvadeset učenika predaje ovaj list jedan drugom i svaki od njih, po svojoj volji, dodaje broj 1 ili oduzima 1. Može li se u rezultatu dobiti 0?

Rješenje: Ne. Svakim dodavanjem (oduzimanjem) broja 1 mijenja se parnost napisanog broja (invarijanta). Poslije prvog učenika broj će biti paran, poslije drugog neparan, poslije trećeg paran, poslije četvrтog neparan itd. Poslije dvadesetog učenika broj će biti neparan, što znači da se na kraju ne može dobiti 0.

8. Dokazati da jednačina $3x^2 + 18xy + 4y^2 - 11x - 16y - 3 = 0$ nema cjelobrojnih rješenja (nema rješenja u skupu cijelih brojeva).

Rješenje: Datu jednačinu možemo zapisati u obliku $3x(x+1) + 18xy + 4y^2 - 14x - 16y = 3$. Za proizvoljne cijele brojeve x i y lijeva strana jednačine je paran broj, a desna neparan. Koristili smo činjenicu da je $x(x+1)$, proizvod dva uzastopna cijela broja, paran broj. Slijedi, data jednačina nema cjelobrojnih rješenja.

9. Kvadratna tablica 9×9 popunjena je brojevima tako da je proizvod brojeva u svakom retku negativan. Dokazati da postoji stubac u kojem je proizvod svih brojeva negativan.

Rješenje: Kako je proizvod brojeva u svakom retku negativan, a redaka ima neparan broj, to je i proizvod svih brojeva u tablici negativan. Sa druge strane, taj proizvod je jednak proizvodu svih brojeva u stupcima. Kako je taj proizvod negativan, to postoji stubac sa negativnim proizvodom brojeva. Ovdje je invarijanta znak proizvoda brojeva u kvadratnoj tablici.

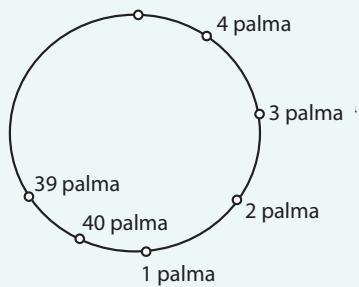
10. Na ostrvu se nalazi 10 crvenih kameleona, 12 plavih i 17 crvenih. Kada se sretnu dva kameleona različitih boja, oba promijene boju u onu treću. Može li se dogoditi da svi kameleoni postanu iste boje?

Rješenje: Ne. Kakve promjene nastaju pri susretu dva kameleona? Dvije vrste se smanje za po 1, a treća poveća za 2. To nas podsjeća na ostatke dijeljenja prirodnog broja sa 3. Dakle, u svakom susretu ostatak pri dijeljenju broja pripadnika svake vrste sa 3 se promijeni, i to tako da se poveća tačno za dva. Zapazimo da su na početku ostaci pri djeljenju sa 3 broja pripadnika svake vrste međusobno različiti, pa će takvi i ostati. Slijedi, ne može se dogoditi da dvije vrste dođu do 0 pripadnika, jer bi tada davale isti ostatak.

Sljedeći zadatak je takmičarski. Zato pažljivo pročitajte rješenje.

11. Na svakoj od 40 palmi, raspoređenih u krug, nalazi se po jedan galeb. S vremena na vrijeme neka dva galeba preljeću na susjedne palme, u suprotnim smjerovima. Mogu li se svi galebovi naći na jednoj palmi?

Rješenje: Ne. Označimo palme, redom, na primjer, u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, brojevima 1, 2, 3, ..., 40 (vidi sliku). Na ovaj način je svakom galebu pridružen broj (redni broj palme na kojoj se nalazi). Označimo sa S zbir obilježja svih palmi na kojima se nalaze galebovi ($S = 1 + 2 + 3 + \dots + 40 = 420$). Galeb koji leti na susjednu palmu, u smjeru kretanja kazaljke na satu, uvećava svoj broj za 1, a onaj koji leti u suprotnom smjeru, umanjuje svoj broj za 1. Zbir S se neće promijeniti. Kako još može biti? Može galeb sa 1. palme preletjeti na 40. palmu, a drugi sa 40. palme na 1. palmu. Zbir S se, opet, neće promijeniti. Slučaj da galeb sa 40. palme preleti na 1. palmu, a drugi galeb, negdje, sa jedne palme na sljedeću, u suprotnom smjeru, svoj broj će smanjiti za 1. Sada se zbir S uvećao za 40. Poslednji slučaj: galeb sa 1. palme preleti na 40. palmu, a drugi, negdje, preleti na susjednu palmu i pri tome uveća svoj broj za 1. Zbir S će se smanjiti za 40. Iz prethodnog slijedi, zbir S se ili ne mijenja,



ili se smanjuje za 40, ili se uvećava za 40. U svim slučajevima ostatak dijeljenje tog zbira sa 40 se ne mijenja (invarijanta). U početku taj ostatak je 20 (420 podijeljeno sa 40 daje količnik 10 i ostatak 20), a ako bi svi galebovi bili na jednoj palmi on bi bio jednak 0. Zato se galebovi ne mogu naći na jednoj palmi.

Napomena: Ako je broj palmi i galebova neparan, tada se može dokazati, da se svi galebovi mogu naći na jednoj palmi. Pokažite to na primjeru 3 palme i 3 galeba.

ZADACI ZA VJEŽBU

- U nekoj državi bilo je 10 banaka. Razvoj ekonomije je zahtijevao da se broj banaka uveća. Po zakonu banku je moguće otvoriti samo dijeljenjem već postojećih banaka na 4 nove banke. Poslije određenog vremena ministar finansija je predsjedniku države saopštio da je u državi otvorena 71 banka. Predsjednik je naredio da se smijeni ministar finansija. Zbog čega?
Odgovor: Broj banaka pri dijeljenju sa 3 mora dati ostatak 1.

- Može li se kvadrat 25×25 razrezati na pravougaonike 2×1 ?
Odgovor: Ne, jer broj $625 (= 25^2)$ nije djeljiv sa 2.

- Može li se povezati 9 gradova putevima, tako da iz svakog grada izlaze po 3 puta?
Odgovor: Ne, jer svaki put se broji dva puta, zato je ukupan broj puteva paran. U našem slučaju je $3 \cdot 9 = 27$ neparan broj.

- Da li je tačna jednakost $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 99 \cdot 100 = 20222023$?
Odgovor: Ne, broj na lijevoj strani znaka jednakosti je paran, a na desnoj neparan.

- Na šahovskoj tabli se nalaze crni lovac (laufer) i bijela kraljica. Bijeli igra prvi. Dokazati, da pri pravilnoj igri, crni ne može pobijediti.
Odgovor: Lovac cijelo vrijeme ostaje na polju iste boje (to je invarijanta u datom zadatku). Zato, ako kraljica svakim svojim pokretom prelazi na polje druge boje, nju je nemoguće pobijediti.

- U jednom kvadratiču tablice 4×4 zapisan je znak „–”, a u svim ostalima znak „+”. Dozvoljeno je istovremeno mijenjati znak u svim kvadratićima jednog retka, ili jednog stupca. Da li se ovim radnjama može dobiti da u svim kvadratićima bude znak „+”?

Odgovor: Ne. Uputstvo: Zamijenimo znak „+” sa 1, a znak „–” sa -1 .

Dr Goran Šuković

RAD SA VEKTORIMA

U prethodnom broju smo pokazali kako se kreiraju vektori i kako se dodaju i uklanjuju elementi iz vektora. Uobičajeno je da se elementi dodaju na kraj vektora, pomoću funkcije `push_back`. Ako se element dodaje na neku naznačenu poziciju tj. ako nije kraj vektora, onda se svi elementi iza te pozicije pomjeraju na nove pozicije. U slučaju uklanjanja elementa sa kraja ili označene pozicije, smanjuje se veličina vektora. Takođe, ako se ne briše sa kraja, vrši se pomjeranje elemenata na nove pozicije.

Funkcije za rad sa vektorima možemo uopšteno grupisati u tri kategorije:

- Modifikatori
- Iteratori
- Kapacitet.

Modifikatori, kako im ime sugerije, služe za modifikaciju ili mijenjanje vektora. Na primjer, funkcija `assign()` dodjeljuje novu vrijednost elementu vektora.

Iteratorske funkcije služe za kretanje (iteraciju) kroz elemente vektora, pa na primjer, funkcija `end()` pokazuje na poslednji element vektora.

Funkcije iz kategorije kapacitet utiču na promjenu veličine vektora. Na primjer, funkcija `resize(n)` mijenja veličinu vektora.

Iteratori se koriste da pokažu na memoriju elementa vektora. Možemo ih kreirati na sljedeći način:

```
vector<T>::iterator iteratorName;
```

Na primjer, možemo kreirati 2 iteratora za vektor cijelih brojeva i vektor realnih brojeva:

```
// iterator za int vector  
vector<int>::iterator iter1;  
  
// iterator za double vector  
vector<double>::iterator iter2;
```

Iteratori se postavljaju primjenom funkcija `begin()` i `end()`. Funkcija `begin()` vraća iterator koji pokazuje na prvi element vektora. Na primjer,

```
vector<int> broj = {1, 2, 3};
vector<int>::iterator iter;

// iter pokazuje na broj[0]
iter = broj.begin();
```

Funkcija `end()` pokazuje na **element koji teoretski dolazi poslije posljednjeg elementa vektora**. Na primjer:

```
// iter pokazuje na posljednji element vektora broj
iter = broj.end() - 1;
```

Primjer: C++ vektor iteratori

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    vector<int> broj {1, 2, 3, 4, 5};

    // deklaracija iteratora
    vector<int>::iterator iter;

    // inicializacija iteratora - pokazuje na prvi element
    iter = broj.begin();

    // stampa elementa
    cout << "broj[0] = " << *iter << endl;

    // iterator pokazuje na treci element
    iter = broj.begin() + 2;
    cout << "broj[2] = " << *iter << endl;

    // iterator pokazuje na posljednji element vektora
    iter = broj.end() - 1;
    cout << "broj[4] = " << *iter << endl;

    // iterator i petlja for
    for (iter = broj.begin(); iter != broj.end(); ++iter) {
        cout << *iter << " ";
    }

    return 0;
}
```

Brisanje elementa sa zadate pozicije ili dodavanje elementa na zadatu poziciju zahtjeva upotrebu iteratora. Pozicija elementa se zadaje iteratorom. Pogledajte sljedeći primjer, gdje koristimo funkcije: `assign`, `push_back`, `insert`, `emplace` i `erase`.

Primjer: modifikatori i iteratori

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;
int main()
{
    vector<int> broj;
    vector<int>::iterator iter;
    // 9 elemenata, svi su jednaki 1
    broj.assign(9,1);
    cout << "Prikaz vektora poslije assign:" << endl;
    for(iter = broj.begin(); iter != broj.end(); ++iter){
        cout << *iter << " ";
    }
    cout << endl;

    // dodavanje na kraj vektora
    broj.push_back(5);
    cout << "Prikaz vektora poslije push_back:" << endl;
    for(iter = broj.begin(); iter != broj.end(); ++iter){
        cout << *iter << " ";
    }
    cout << endl;

    // dodavanje na zadatu poziciju
    broj.insert(broj.begin() + 2, 100);
    cout << "Prikaz vektora poslije insert:" << endl;
    for(iter = broj.begin(); iter != broj.end(); ++iter){
        cout << *iter << " ";
    }
    cout << endl;
```

```

// dodavanje na zadatu poziciju pomocu emplace
broj.emplace(broj.begin() + 2, 200);
cout << "Prikaz vektora poslije emplace:" << endl;
for(iter = broj.begin(); iter != broj.end(); ++iter){
    cout << *iter << " ";
}
cout << endl;

// brisanje treceg elementa iz vektora
broj.erase(broj.begin() + 2);
cout << "Prikaz vektora poslije erase:" << endl;
for(iter = broj.begin(); iter != broj.end(); ++iter){
    cout << *iter << " ";
}
cout << endl;

return 0;
}

```

Obratite pažnju da se kod zadavanja pozicije u funkcijama insert, emplace i erase koriste iteratori. Prvi element se zadaje kao iter.begin(), a svaki sljedeći element se dobija dodavanjem indeksa na iter.begin() (na primjer, broj.begin() + 2). Slično je i sa funkcijom iter.end(), osim što morate voditi računa da je posljednji element vektora zadat sa iter.end() - 1.

Za kraj, evo spiska modifikatora koje možete koristiti u vašim programima:

Modifiers

1. **assign()** – dodjeljuje nove vrijednosti elementima vektora, zamjenjući postojeće
2. **push_back()** – dodaje element na kraj vektora
3. **pop_back()** – uklanja element sa kraja vektora
4. **insert()** – dodaje elemente prije zadate pozicije
5. **erase()** – uklanja elemente sa zadate pozicije
6. **swap()** – razmjenjuje sadržaj dva vektora
7. **clear()** – uklanja sve elemente iz vektora
8. **emplace()** – proširuje vektor umetanjem elementa na zadatu poziciju
9. **emplace_back()** – umeće element u vektor, dodavanjem na kraj vektora

Zadaci za vježbu

VI razred

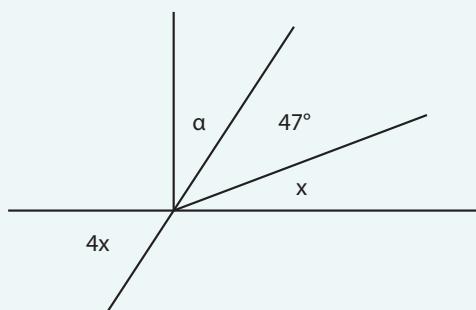
Razlomci i uglovi

- Napisati razlomak $\frac{x}{y}$ tako da je $2 < \frac{x}{y} < 3$ i da je imenilac prost broj.
- Uporediti brojeve $\frac{17}{40}$ i $\frac{1}{2}$.
- Nacrtati unakrsne uglove α i β čiji je zbir 80° .
- Skratiti razlomke $\frac{90}{180}$ i $\frac{31}{217}$.
- Odrediti najmanje brojeve a i b tako da važi jednakost $126 \cdot a = 228 \cdot b$.
- Ugao unakrsan uglu od $5^\circ 4' 3''$ je: a) $543''$ b) $50403''$ c) $18243''$
d) $18234''$? Dati obrazloženje.
- Odrediti najveći dvocifreni prirodan broj n takav da je razlomak $\frac{n}{582}$ neskrativ.
- Ako je ugao α komplementan uglu $45^\circ 48'$ i ugao β suplementan uglu $48^\circ 48'$, izračunati ugao: $4 \cdot (\alpha:5 + \beta:4)$.
- Uglovi α, β, γ i δ su nadovezani i poznato je da $\beta = 2\alpha$, $\gamma = \alpha + \beta$ i da su α i δ unakrsni. Izračunati ova četiri ugla.
- Nadovezivanjem 6 jednakih uglova dobija se da su prvi i šesti ugao unakrsni. Odrediti nepoznati ugao.

Prijedlog drugog pismenog zadatka

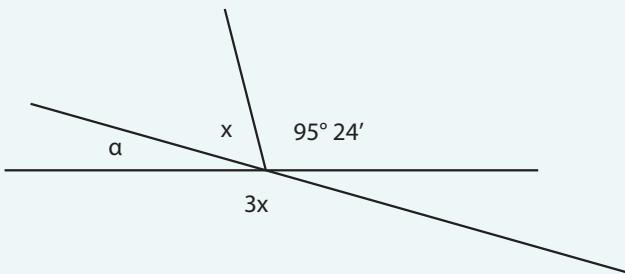
I grupa

- Dati su uglovi $\alpha = 31^\circ 32' 33''$ i $\beta = 65^\circ 43' 21''$.
Izračunati: a) $\alpha + \beta$; b) $\beta - \alpha$; c) 2α ; d) $(\alpha + \beta):2$.
- Dat je ugao $\alpha = 35^\circ 28'$. Izračunati ugao koji je suplementan datom uglu.
- Odrediti mjeru ugla α na osnovu podataka sa slike.
- Skratiti razlomak $\frac{88}{330}$ do neskrativog.
- Uporediti razlomke $\frac{22}{7}$ i $\frac{19}{6}$.



II grupa

1. Dat je ugao $\alpha = 85^\circ 37'$. Izračunati ugao koji je komplementan datom uglu.
2. Dati su uglovi $\alpha = 51^\circ 42' 33''$ i $\beta = 75^\circ 53' 31''$.
Izračunati: a) $\alpha + \beta$; b) $\beta - \alpha$; c) 2α ; d) $(\alpha + \beta)/2$.
3. Odrediti mjeru ugla α
na osnovu podataka sa
slike desno.
4. Skratiti razlomak $\frac{140}{105}$
do neskrativog.
5. Uporediti razlomke
 $\frac{24}{7}$ i $\frac{27}{8}$.



Nikola Radojičić, JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić

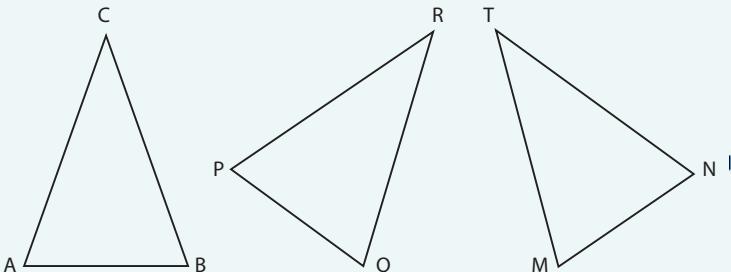
VII razred

Jednačine i nejednačine u skupu Z. Trougao

1. Riješiti jednačine:
 - a) $x: (-8) = 24$; b) $15: x = -3$; c) $144: (-x) = -9$;
 - d) $x: (-12) = +25$; e) $6 : 2x = -3$; f) $-24: (3x) = -4$;
 - g) $-7x: 14 = -3$; h) $(3x - 2): 5 = -7$; i) $(x + 3)(x - 2) = 0$;
 - j) $2 \cdot |x| - 5 = 7$; k) $5 - |2x| = -7$.
2. Objasniti „tajnu“ kako Martin „pogađa“ broj kuće u kojoj stanuje njegov drug Miloš. Martin kaže: „Pomnoži broj kuće u kojoj stanuješ sa 10 i tome dodaj -10 . Kada mi kažeš koji si broj dobio, odmah će ti reći koji je broj tvoje kuće. Miloš: „Dobio sam broj 350“. Martin: „Broj tvoje kuće je 36“.
3. Kada od petine broja -35 oduzmete trostruku vrijednost nekog broja x , dobijate broj 5. Koji je to broj?
4. Riješiti nejednačine:
 - a) $3x > 9$; b) $x: 3 < -1$; c) $1 - 3x \leq -2$;
 - d) $-8 + 2x > 6$; e) $x: 5 - 18 \leq -15$; f) $(3x - 2) \cdot 4 \geq -80$;
 - g) $|x| < 2$; h) $|x - 1| \leq 2$.

14 Dijagonala

5. Odredite zajednička cjelobrojna rješenja nejednačina:
- $4x - 8 < 8$ i $5 - 2x < 7$;
 - $3x - 1 < 5$ i $7 + 3x > 13$.
6. Trouglovi ABC, PQR, MNT su jednakokraki (vidi sliku). Ako je $AB = PQ = MN = 2\text{ cm}$, $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle PRQ = 30^\circ$, $\angle MTN = 40^\circ$ utvrditi koji su trouglovi podudarni.



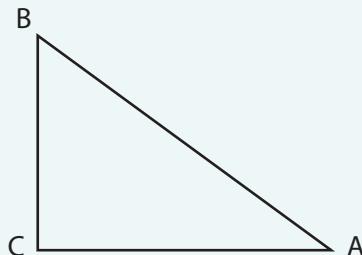
7. Stranica DC kvadrata ABCD podijeljena je tačkama M i N na tri jednake duži DM, MN i NC, tako da važi: $DM = MN = NC$. Dokazati da su duži AM i BN jednake.
8. Spoljašnji ugao ΔABC je $\alpha_1 = 105^\circ$, a unutrašnji ugao $\beta = 38^\circ$. Koja stranica je najkraća?
9. U ΔABC ugao kod tjemena A je 80° . Simetrala spoljašnjeg ugla kod tjemena A siječe pravu BC u tački M. Ako je ΔABM jednakokraki, izračunati njegove uglove.
10. Uglovi ΔABC su $\alpha = 36^\circ$ i $\beta = 54^\circ$. Izračunati ugao između težišne linije CC₁ i simetrale ugla β .
11. Odrediti uglove trougla ako su zbir i razlika dva spoljašnja ugla jednaki: $\alpha_1 + \beta_1 = 220^\circ$, $\alpha_1 - \beta_1 = 16^\circ$.
12. Konstruisati sledeće trouglove:
- Jednakostranični trougao stranice $a = 4\text{ cm}$.
 - Jednakokraki trougao čije su stranice $a = 3\text{ cm}$ i $b = 7\text{ cm}$.
 - Jednakokrako pravougli trougao katete 5 cm .

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. a) Odrediti proizvod rješenja jednačina:
 $x : 4 - 8 = -10$ i $(8 - 5x) \cdot (-4) + 40 = -12$.

- b) Koje cijele brojeve možemo pomnožiti brojem -3 da bi se dobio broj koji nije manji od zbiru brojeva 41 i -14 ?
2. Jeden spoljašnji ugao trougla ABC ima vrijednost $\gamma_1 = 125^\circ$, a jedan unutrašnji, njemu nesusjedni ugao $\alpha = 65^\circ$. Izračunati ostale uglove ΔABC , a zatim poređati stranice tog trougla od najmanje do najveće.
3. Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla ABC ($\alpha = \beta$) iznosi 138° . Odrediti ugao kojeg obrazuju prave određene visinama h_a i h_b (nacrtati sliku).
4. Izračunati obim trougla sa slike ($\angle C = 90^\circ$), ako je :
 $CA = 10,39\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$, $\angle \alpha = 30^\circ$.



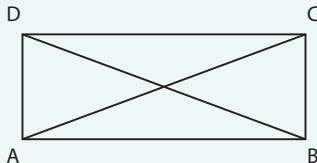
5. Izračunati unutrašnje uglove trougla ABC ako je ugao β osam puta veći od ugla α , a ugao γ za 10° veći od ugla β .
6. Dat je pravougaonik ABCD i tačka M koja se nalazi na sredini stranice CD. Dokazati da je duž AM = BM.

II grupa

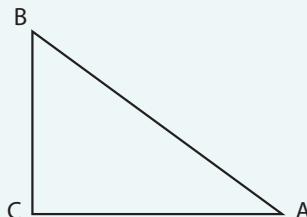
1. a) Izračunati vrijednosti izraza, pa dobijene rezultate uporediti:
 $M = -5 \cdot (-8) - 3 \cdot (+7) + 2 \cdot (-4 - 6)$,
 $N = 10 - 6 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4 - 2)$.
- b) Koje cijele brojeve možemo podijeliti brojem -4 da bi se dobio broj koji nije veći od razlike brojeva 12 i -2 ?
2. Jeden spoljašnji ugao trougla ABC je $\beta_1 = 128^\circ$, a jedan unutrašnji, njemu nesusjedni ugao je $\gamma = 42^\circ$. Izračunati ostale uglove tog trougla i odrediti srednju po veličini stranicu tog trougla.
3. Ugao kojeg grade visine jednakokrakog trougla povučene iz vrha trougla i ugla na osnovici, iznosi 129° . Izračunati uglove tog trougla. Šta je veće: krak ili osnovica?

16 Dijagonala

4. Jedan unutrašnji ugao trougla je tri puta veći od drugog unutrašnjeg ugla, a razlika njihovih spoljašnjih uglova je 70° . Izračunati uglove tog trougla.
5. Dokazati da su dijagonale pravougaonika jednake.



6. Obim trougla ABC ($\angle C = 90^\circ$) sa slike je $O = 28,39 \text{ cm}$. Izračunati stranice CB i AB ako je $CA = 10,39 \text{ cm}$ i $\angle \alpha = 30^\circ$.



Nevena Ljujić i Hidajeta Lukač, JU OŠ „Dušan Korać“ Bijelo Polje

VIII razred

Stepeni. Polinomi. Funkcije

1. Koristeći svojstva stepena izračunati:
 - a) $\frac{3^3 \cdot (3^2)^5 : 3}{3^8 \cdot 27}$;
 - b) $\sqrt{\frac{(-2)^4 \cdot (-2)^5}{(-2)^9 \cdot (-2)^2}}$;
 - c) $5^{25} : (5 \cdot 5^4 \cdot 125)^3$.
2. Izračunati vrijednosti izraza: $5m^2 - 3m + 7$, ako je:
 $m = \frac{(-3)^4 : 3^2 \cdot ((-3)^8 : (-3)^4)^2}{(3^2)^4}$.
3. Riješiti jednačine:
 - a) $\frac{1}{25} \cdot 5^{10} + \frac{1}{5} \cdot 5^9 - 7 \cdot 5^8 = x \cdot 5^8$;
 - b) $(7^{10} : 7)^2 \cdot 7^2 = 49 \cdot 7^{2x}$.
4. Uprostiti izraze:
 - a) $\frac{(x^7)^3 \cdot (-x)^4}{(x^3 \cdot x \cdot x^5)^2}$;
 - b) $(4a^3 b^2)^3 : (-\frac{1}{2}ab^3)^2$;
 - c) $(xy^3)^2 \cdot (x^2y)^3$.
5. Ako je $P = 2x^2 - 3x + 4$, $Q = -3x + 2$ i $R = -3x^2 + 4x$, srediti izraze:
 - a) $P - Q - R$;
 - b) $Q \cdot R$;
 - c) $P - 2Q + 3R$;
 - d) $-P - Q + R$.

6. Rastaviti na proste činioce:
- $4x^2 - 25$
 - $x^2 + 10x + 25$
 - $4m^2 - 12mn + 9n^2$
 - $a^2 - 121$
 - $ax + ay + bx + by$
 - $12a + 4c - 21xa - 7xc$
 - $32c^2 - 24ac + 18a^2$.
7. Izračunati vrijednost izraza $A - B$ ako je: $A = \frac{8^{2n+1}}{2^{6n+1}}$ i $B = \frac{3^{n+2} \cdot 27^n}{(3^{2n})^2}$.
8. Razliku kvadrata binoma $3x - 5$ i binoma $2x + 1$ uvećati za kvadrat njihove razlike.
9. Uprostiti izraz:
- $(2a + 5)^2 + (3a - 1)(3a + 1)$
 - $(x + y)^2 + (x - y)^2$.
10. Popuniti tabelu:
- | | | | | |
|-----------|----|---|------|----|
| x | -3 | 4 | | |
| $y = -3x$ | | | 0,12 | -6 |
11. Odrediti koeficijent proporcionalnosti k funkcije $y = kx$ ako grafik funkcije sadrži tačku $A(-3, 6)$. Za dobijenu vrijednost k nacrtati grafik te funkcije. Da li tačka $B(-4, 1)$ pripada grafiku te funkcije?
12. Dokazati da je vrijednost izraza: $25^4 + 125^3 + 5^7$ djeljiva sa 31.

Prijedlog II pismenog zadatka

I grupa

1. Uprostiti izraze:
- $\frac{x^{12} \cdot x^5 \cdot x^4}{(x^2)^5}$
 - $(x - 3)^2 - (3x + 4)(x - 2) + 2x^2$
 - $(0,5xy^3)^2 \cdot (-4x^3y^4)$.
2. Rastaviti na proste činioce:
- $9a^2 - 25b^2$
 - $-16 - 8x - x^2$
 - $xy + y - 4x^2 - 4x$.
3. Srediti izraz $-P + Q \cdot R$ ako je:
 $P = -3x^2 + 2x - 5$, $Q = -3x + 2$ i $R = -x + 4$.
4. Odrediti koeficijent proporcionalnosti k funkcije $y = kx$ ako grafik funkcije sadrži tačku $A(-\frac{1}{5}; 0,4)$. Za dobijenu vrijednost k nacrtati grafik te funkcije. Da li tačka $B(2, 4)$ pripada grafiku te funkcije?
5. Riješiti jednačinu: $\frac{1}{8} \cdot 2^{11} + 3 \cdot 4^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^9 = x \cdot 2^8$.

II grupa

- Uprostiti izraze:
a) $\frac{a^{13} \cdot a \cdot a^5}{(a^2)^4}$; b) $(x - 3)(2x + 1) - (2x - 1)^2$; c) $(\frac{1}{3}ab^3)^3 \cdot (-3a^2b^4)^2$.
- Rastaviti na proste činioce:
a) $\frac{1}{9}a^2 - 49b^2$; b) $32 - 16x + 2x^2$; c) $3x + 6xy - 2y - 1$.
- Srediti izraz $A \cdot B - C$ ako je:
 $A = -2x + 3$, $B = -3x + 2$, i $C = -6x^2 + 4x - 3$.
- Odrediti koeficijent proporcionalnosti k funkcije $y = kx$ ako grafik funkcije sadrži tačku $A(-\frac{1}{2}, 0,25)$. Za dobijenu vrijednost k nacrtati grafik te funkcije. Da li tačka $B(2, -1)$ pripada grafiku te funkcije?
- Riješiti jednačinu: $\frac{1}{7} \cdot 7^{11} - 5 \cdot 49^5 + \frac{1}{49} \cdot 7^{12} = x \cdot 7^{10}$.

Marko Bogojević, JU OŠ „Milorad Musa Burzan“, Podgorica

IX razred

**Linearna funkcija. Površina prizme.
Površina i zapremina kocke i kvadra**

- Data je funkcija $f(x) = 2x - 3$. Odrediti: $f(0), f(3), f(-\frac{1}{2}), f(x + 3)$.
- Datu funkciju prevesti u eksplisitni oblik i odrediti k i n:
a) $2x - 2y + 4 = 0$; b) $5x - 2y - 3 = 0$; c) $0,6x + 8 = -3y - 2$.
- Osnovice jednakokrakog trapeza su 5 cm i 3 cm , a krak $x \text{ cm}$. Izraziti obim trapeza u funkciji kraka x.
- Koje od datih tačaka pripadaju grafiku funkcije $y = \frac{1}{2}x + 3$: A(2, 4), B(0, 3), C(4, 4), D(-1, $\frac{5}{2}$)?
- Nacrtati grafik i ispitati funkciju (odrediti nulu, presjek sa Oy osom, zatim tok i znak funkcije):
a) $y = -2x + 4$; b) $3x + 2y + 6 = 0$.
- Odrediti vrijednost parametra a tako da prava p sadrži tačku P:
a) $p: 3y = x + a, P(2, 4)$; b) $p: 3x - 2y + a = 0, P(-1, 1)$.
- Odrediti parametar m tako da grafik funkcije $y = (m - 1)x + 2m - 1$ sadrži koordinatni početak.

8. Data je funkcija $y = kx + 4$. Odrediti k tako da $x_0 = 2$ bude nula ove funkcije i za dobijenu vrijednost k nacrtati grafik funkcije.
9. Data je linearna funkcija $y = (2p - 5)x + p + 1$. Odrediti vrijednost parametra p tako da:
 - a) funkcija bude opadajuća;
 - b) funkcija bude rastuća;
 - c) grafik siječe Oy osu u tački $N(0, -2)$;
 - d) grafik siječe Oy osu iznad ose OX ;
 - e) grafik predstavlja horizontalnu pravu;
 - f) grafik je paralelan pravoj $3x - y - 7 = 0$.
10. Naći vrijednost parametra m tako da grafici funkcija $y = (3m - 5)x - 2$ i $y = (m + 2)x + m - 1$ budu paralelni.
11. Naći linearu funkciju koja sadrži tačke:
 - a) $K(2, -1)$, $L(0, 3)$;
 - b) $M(1, 1)$, $N(-3, 1)$.
12. Data je funkcija $y = \left(a + \frac{1}{4}\right)x + 1$.
 - a) Odrediti vrijednost parametra a tako da tačka $A(-4, 6)$ pripada grafiku funkcije;
 - b) Izračunati površinu trougla koji grafik gradi sa koordinatnim osama za dobijenu vrijednost a .
13. Nacrtati grafike funkcija:
 - a) $y = |x| + 1$;
 - b) $y = |x - 1|$;
 - c) $y = x - |x|$.
14. Odrediti linearu funkciju koja sadrži presjek pravih $y = -2x + 1$ i $x + y - 3 = 0$, dok joj je slobodan član $n = -3$. Nacrtati grafik dobijene funkcije.
15. Izračunati površinu i dužinu prostorne dijagonale kocke kod koje je zbir svih ivica 60 cm .
16. Izračunati površinu kvadra kod koga je dijagonala osnove 10 cm , jedna osnovna ivica 8 cm i visina 15 cm .
17. Mjerni brojevi dužine, širine i visine kvadra su tri uzastopna prirodna broja. Ako je zbir svih ivica kvadra 72 cm , izračunati površinu i zapreminu kvadra, kao i dužinu prostorne dijagonale.
18. Sobi oblika kvadra, dužine $4,8\text{ m}$, širine 4 m i visine 3 m , treba okrečiti. Kolika se površina kreći ako se u njoj nalazi prozor dimenzija $2\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ i vrata $2,2\text{ m} \times 1\text{ m}$?
19. Četiri jednakе kocke ivice 6 cm složene su jedna na drugu. Izračunati površinu i zapreminu tako dobijenog tijela.

20 Dijagonalala

20. Dijagonalala kvadra $D = 26 \text{ cm}$ siječe bočnu ivicu pod ugлом od 30° , a razmjera osnovnih ivica je $a : b = 5 : 12$. Izračunati površinu i zapreminu kvadra.
21. Osnova prave četverostrane prizme je romb čija je stranica 5 cm i jedna dijagonalna 6 cm . Ako je visina prizme dva puta duža od druge dijagonale osnove, izračunati površinu te prizme.
22. Osnova prave trostrane prizme je pravougli trougao čije su katete 12 cm i 9 cm . Ako je najveća bočna strana prizme kvadrat, izračunati njenu površinu.
23. Izračunati površinu pravilne četverostrane prizme ako joj je visina 10 cm , a površina dijagonalnog presjeka $60\sqrt{2} \text{ cm}^2$.
24. Izračunati površinu pravilne jednakoivične trostrane prizme ako joj je visina osnove $4\sqrt{3} \text{ cm}$.
25. Najveći dijagonalni presjek pravilne jednakoivične šestostrane prizme ima površinu 100 cm^2 . Izračunati površinu te prizme.

Prijedlog drugog pismenog zadatka

Osnovni nivo

1. Data je funkcija $f(x) = -2x - 2$. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.
2. Data je funkcija $f(x) = 3x - 3$. Izračunati: $f(-2), f\left(\frac{1}{3}\right), f(2,3)$.
3. Izračunati površinu kvadra ako su mu osnovne ivice 7 cm i 8 cm , a visina je jednak zbiru osnovnih ivica.
4. Izračunati površinu pravilne trostrane prizme ako joj je osnovna ivica 6 cm , a visina je za 5 cm duža od nje.
5. Zbir svih ivica kocke je 72 cm . Izračunati površinu te kocke, dužinu njene prostorne dijagonale i površinu dijagonalnog presjeka.

Srednji nivo

1. Data je linearna funkcija $y = (4m - 6)x - (3m - 2)$. Odrediti parametar m tako da tačka $M(3, 2)$ pripada grafiku funkcije. Za dobijeno m nacrtati grafik, odrediti tok i znak funkcije.
2. Grafik funkcije $y = -2x + 4$ sa koordinatnim osama određuje jedan trougao. Izračunati površinu tog trougla i ispitati da li tačka $A(3, -2)$ pripada grafiku date funkcije.
3. Osnova prave prizme je pravougli trougao čija je jedna kateta 8 cm , dok je druga kateta za 4 cm kraća od hipotenuze. Izračunati površinu prizme ako je visina prizme jednakaja najkraćoj osnovnoj ivici.

4. Osnova prave prizme je jednakokraki trapez čije osnovice imaju dužine 11 cm i 5 cm , a visina trapeza je 4 cm . Izračunati površinu te prizme, ako je njena visina dva puta duža od kraka trapeza.
5. Kraća dijagonala osnove pravilne šestostrane prizme ima dužinu $3\sqrt{3}\text{ cm}$. Izračunati površinu te prizme ako njena visina i osnovna ivica obrazuju proporciju $H : a = 3 : 1$.

Viši nivo

1. Izračunati površinu figure koju ograničavaju koordinatne ose i prave $y - x + 4 = 0$ i $y - 2x + 2 = 0$.
2. a) Odrediti pravilo za linearnu funkciju čiji je grafik paralelan grafiku funkcije $\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$ i sadrži tačku $A(-1, 1)$. Nacrtati i ispitati grafik dobijene funkcije.
b) Nacrtati grafik funkcije $y = x + |x|$.
3. Izračunati površinu pravilne šestostrane jednakoivične prizme ako je rastojanje njenih naspramnih bočnih strana 6 cm .
4. Osnova prave prizme je romb čija visina iznosi $5\sqrt{3}\text{ cm}$, a veličina njegovog oštrog ugla je 60° . Izračunati površinu te prizme, ako je zbir dužina njene osnovne ivice i visine jednak 15 cm .
5. Tri kocke čije su ivice 6 cm , 8 cm i 10 cm pretopljene su u jednu. Kolika je površina dobijene kocke?

Anda Vujović, JU OŠ „Pavle Rovinski“, Podgorica

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Uglovi α i β su suplementni, a uglovi β i γ su komplementni. Odrediti uglove α , β i γ , ako je ugao α pet puta veći od ugla γ .
2. Koliki ugao zaklapaju na časovniku satna i minutna kazaljka u 8 sati i 20 minuta?
3. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiriугла: dva oštra α i γ i dva tupa β i δ . Odrediti te uglove ako važi: $7 \cdot (\alpha + \gamma) = 5 \cdot (\beta + \delta)$.
4. Tri brata imaju 5 punih čupova meda, 5 praznih čupova i 5 čupova koji su do pola napunjeni medom. Pomognite braći da podijele med i čupove tako da svaki od njih dobije jednaku količinu meda i jednak broj čupova.

VII razred

- U trouglu ABC ugao β je veći od ugla γ za 20° , a manji od ugla α za 20° . Simetrala ugla α sijeće stranicu BC u tački D. Šta je veće: BD ili CD?
- U spoljašnjoj oblasti trougla ABC data je tačka M. Dokazati da je zbir duži MA, MB i MC veći od poluobima trougla.
- Dat je jednakokraki trougao ABC sa osnovicom AB. Na kraku BC izabrana je proizvoljna tačka M, pa je na produžetku kraka AC, iza A u odnosu na C, konstruisana tačka N, tako da je $AN = BM$. Dokazati da osnovica AB polovi duž MN.
- U oštrogom trouglu ABC visine AD i CE sijeku se u tački H. Pri tome je $AB = CH$. Dokazati da je $\angle BCA = 45^\circ$.

VIII razred

- Odrediti n ako je $8^{2005} \cdot 8^{2006} \cdot 4^{27} = (((8^n)^{11})^{11})^{11}$.
- Dokazati da su rješenja jednačine: $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ racionalni brojevi.
- Izračunati vrijednost razlomka $\frac{a+b}{a-b}$, ako je: $a > b > 0$ i $a^2 + b^2 = 6ab$.
- Iz mesta A polaze istovremeno biciklista i motociklista. Prvi se kreće prosječnom brzinom 30 km/h , a drugi 45 km/h . Odrediti formulom funkciju koja određuje rastojanje između bicikliste i motocikliste poslije x časova vožnje. Poslije koliko sati će rastojanje između njih biti 60 km ?

IX razred

- Data je funkcija $y = (m^2 - 2)x + 4m^2 - 8$:
 - Odrediti m tako da grafik ove funkcije prolazi kroz tačku T($-3, 7$);
 - Izračunati m tako da grafik ove funkcije bude paralelan grafiku funkcije $y = 2x - 5$;
 - Ako je $m = \sqrt{3}$ izračunati rastojanje koordinatnog početka od date prave.
- Odrediti realan broj a tako da prava $(a - 2)x + y - 2a + 3 = 0$ gradi dva puta veći odsječak na pozitivnom dijelu ose Ox nego na pozitivnom dijelu ose Oy.
- Površine bočnih strana prave trostrane prizme su: 9 cm^2 , 10 cm^2 i 17 cm^2 a površina baze je 4 cm^2 . Odrediti visinu prizme.
- Izračunati zapreminu pravilne šestostrane prizme, ako manja dijagonala prizme dužine $8\sqrt{6}\text{cm}$ sa bazom prizme zaklapa ugao od 45° .

TAKMIČARSKI ZADACI

VI razred

1. Ugao α jednak je zbiru svog komplementnog ugla i svoje tri četvrтине. Koji je to ugao?
2. Na osam stabala jabuka, poređanih u red, rastu plodovi. Poznato je da se broj plodova na svake dvije uzastopne jabuke razlikuje za 1. Da li na svim jabukama može biti 2007 plodova?

VII razred

1. U trouglu ABC je $\alpha - \beta = 40^\circ$. Ako je tačka D na stranici BC takva da je $AC = CD$, izračunati ugao BAD.
2. U koliko sati između $12\text{ }h$ i $13\text{ }h$ prava koja prolazi kroz podeoke za $6\text{ }h$ i $12\text{ }h$ na brojčaniku časovnika predstavlja simetralu ugla koji obrazuju kazaljke tog časovnika?

VIII razred

1. Riješiti jednačinu: $\frac{10^{10} - x}{99999999^2 - 99999998 \cdot 10^9} = 10^9 - 1$.
2. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je vrijednost izraza $n^2 + 2n + 1997$ potpuni kvadrat nekog prirodnog broja.

IX razred

1. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Duž koja spaja centar O osnove ABCD sa tjemenom A_1 siječe dijagonalu AC_1 kocke u tački P. Dužina odsječka OP je $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Kolika je površina kocke?
2. Za koje vrijednosti realnog broja a jednačina $|x - 1| + |x + 1| = a$ ima:
 - a) najviše rješenja;
 - b) najmanje rješenja;
 - c) tačno dva rješenja.

Irena Pavićević, JU OŠ „Štampar Makarije“, Podgorica

RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

- Prodavac jabuka je računao koliko jabuka ima u korpi: „Ako ih brojim po dvije, po tri, po četiri, po pet ili po šest, uvek mi ostane jedna. Ali, ako ih izbrojim po sedam ne ostane mi nijedna.“ Koliko jabuka ima prodavac u korpi?

Rješenje:

Ako smanjimo broj jabuka za 1, onda bi dati broj bio djeljiv sa 2, sa 3, sa 4, sa 5, sa 6. Dakle taj broj je $k \cdot s + 1$, gdje je $s = \text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$. Traženi broj je 301, jer je to najmanji broj koji je ujedno djeljiv sa 7.

- Odrediti sve trocifrene brojeve takve da su i oni i zbir njihovih cifara djeljivi sa 15.

Rješenje:

Kako zbir cifara traženog trocifrenog broja mora biti djeljiv sa 15 u obzir dolazi samo zbir cifara 15 (jer najveći mogući zbir cifara trocifrenog broja iznosi 27). Broj koji je djeljiv sa 15 je djeljiv i sa 3 i sa 5, tj. poslednja cifra mu je 0 ili 5.

Ako je poslednja cifra 0, onda su traženi brojevi 690, 960, 780 i 870.

Ako je poslednja cifra 5, onda su traženi brojevi 195, 915, 285, 825, 375, 735, 465, 645 i 555.

VII razred

- Ako su a , b i c cijeli brojevi i ako je $a \cdot b = -6$, $a \cdot c = -10$ i $b \cdot c = 15$, izračunati $a \cdot b \cdot c$ i a , b i c .

Rješenje:

Kako je a cijeli broj koji je djelilac brojeva -6 i -10 to je $a \in \{1, -1, 2, -2\}$.

U slučajevima kada je $a = 1$ ili $a = -1$, dobijamo da je $b \cdot c = 60$, što je netačno.

U slučaju kada je $a = 2$, imamo da je $b = -3$, $c = -5$ i $a \cdot b \cdot c = 30$ što je jedno rješenje zadatka.

U slučaju kada je $a = -2$, imamo da je $b = 3$, $c = 5$ i $a \cdot b \cdot c = -30$ što je drugo rješenje zadatka.

2. Da li se u kvadrat 3×3 mogu upisati brojevi iz skupa $\{-1, 0, 1\}$ tako da zbroji brojeva po kolonama, vrstama i dijagonalama budu različiti (svaka dva)?

Rješenje:

Moguće vrijednosti zbiru tri broja iz skupa $\{-1, 0, 1\}$ idu od -3 do 3 , tj. ukupno ih je 7 različitih vrijednosti. Kako tabela ima ukupno 8 kolona, vrsta i dijagonala nemoguće je da zbroji budu različiti. Dakle, makar jedan se mora ponoviti.

VIII razred

1. Koliko ima brojeva manjih od 1000 koje se završavaju cifrom 3 i jednaki su zbiru kvadrata dva prosta broja?

Rješenje:

Kako su traženi brojevi jednaki zbiru kvadrata dva prosta broja i zbir je neparan broj (završava se cifrom 3), zaključujemo da jedan od ta dva broja mora biti paran, tj. 2 . Kako se zbir završava cifrom 3 , a jedan sabirak je $2^2 = 4$, kvadrat drugog broja mora da se završava cifrom 9 , tj. broj se mora završavati cifrom 3 ili 7 . Zaključujemo da drugi broj može biti $3, 7, 13, 17$ i 23 .

2. Na košarkaškom turniru svaka ekipa odigrala je sa svakom od ostalih ekipa po jednu utakmicu. Na kraju turnira ispostavilo se da je 90% ekipa postiglo bar po jednu pobjedu, i nije bilo neriješenih utakmica. Koliko ekipa je učestvovalo na turniru?

Rješenje:

Ako je 90% ekipa postiglo bar po jednu pobjedu, onda je preostalih 10% izgubilo sve utakmice. Međutim, nemoguće je da postoje dvije ekipe koje su izgubile sve utakmice, jer je u njihovom međusobnom susretu jedna ekipa pobijedila. Dakle, samo jedna ekipa je izgubila sve utakmice, i ta ekipa čini 10% svih ekipa, što znači da je ukupan broj ekipa jednak 10 .

IX razred

1. Kada se broj koji predstavlja zbir uglova u mnogouglu pomnoži sa brojem dijagonala tog mnogougla dobije se broj 21600 . Koliko stranica ima taj mnogougao?

Rješenje:

$$S_n \cdot D_n = 21600$$

$$(n - 2) \cdot 180^\circ \cdot \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 21600$$

26 Dijagonala

$$n \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) = 240$$

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 6 \cdot 5$$

$$n = 8$$

2. Projekcija duži $AB = 17 \text{ cm}$ na ravan α je duž $CD = 8 \text{ cm}$. Izračunati rastojanja tačaka A i B od ravni α , ako je poznato da se ta rastojanja odnose kao $AC : BD = 3 : 2$

Rješenje:

$$AC = 3k$$

$$BD = 2k$$

$$AB^2 = CD^2 + k^2$$

$$17^2 = 8^2 + k^2$$

$$k^2 = 289 - 64$$

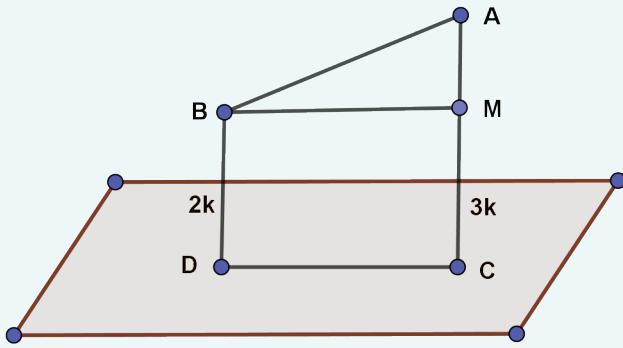
$$k^2 = 225$$

$$k = \sqrt{225}$$

$$k = 5 \text{ cm}$$

$$AC = 3k = 15 \text{ cm}$$

$$BD = 2k = 10 \text{ cm}$$



$$AC = 3k$$

$$BD = 2k$$

$$AB^2 = CD^2 + (5k)^2$$

$$17^2 = 8^2 + 25k^2$$

$$25k^2 = 289 - 64$$

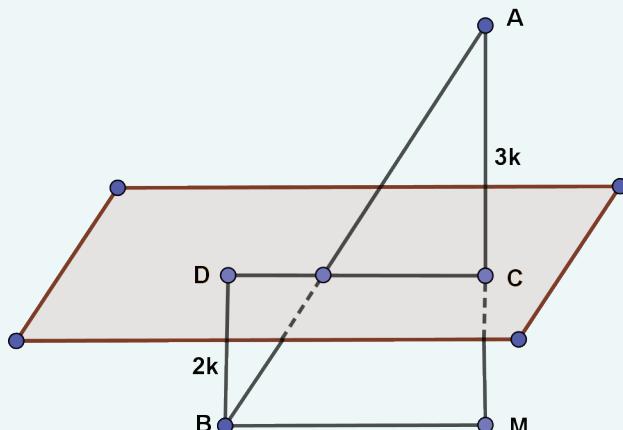
$$k^2 = 225 : 25$$

$$k = \sqrt{9}$$

$$k = 3 \text{ cm}$$

$$AC = 3k = 9 \text{ cm}$$

$$BD = 2k = 6 \text{ cm}$$



PRIPREMA ZA ČAS

Škola	JU OŠ „Štampar Makarije”, Podgorica
Predmet	Matematika – dodatna nastava
Razred	VI
Pojmovi / sadržaji	Brojevni rebusi
Ishodi učenja	Tokom učenja učenici će da rješavaju (dešifruju) rebuse primjenjujući dosadašnja znanja, da razvijaju logiku i saradnju u paru, da proširuju znanja
Tip časa	Proširivanje
Oblici rada	Frontalni, individualni i rad u paru
Nastavne metode	Dijaloško–monološka
Nastavna sredstva	Nastavni listić
Nastavnica	Stanislavka Aprcović

Uvod:

- Pitanja: 1. Šta su to brojevni rebusi?
2. Šta znači riješiti (dešifrovati) brojevni rebus?

Glavni dio:

Učenici samostalno, uz povremene konsultacije sa drugom/drugaricom iz klupe ili nastavnikom/com rade pripremljene zadatke (prilog).

Kod petog zadatka svaki učenik sastavlja po jedan rebus, koji će da rješava njegov/njen drug/drugarica iz klupe.

Završni dio:

Provjera tačnosti urađenih zadataka - usmeno i na tabli.
Nekoliko učenika prezentuju rebuse koje su sami pripremili.

NASTAVNI LISTIĆ

1. Umjesto * zapisati odgovarajuće cifre:

a) $321 \cdot ***$

$$\begin{array}{r} 642 \\ + 963 \\ \hline \end{array}$$

** ***

b) $321 \cdot ****$

$$\begin{array}{r} 7353 \\ + 2451 \\ \hline \end{array}$$

2. Riješiti (dešifrovati) rebus:

$$\begin{array}{r} \text{M} \quad \text{R} \quad \text{A} \quad \text{K} \\ + \quad \text{M} \quad \text{R} \quad \text{A} \quad \text{K} \\ \hline \text{K} \quad \text{A} \quad \text{N} \quad \text{Dž} \quad \text{A} \end{array}$$

3. Riješiti (dešifrovati) rebus:

a) $\text{AM} - \text{AM} = \text{A}$

b) $\text{AX} \cdot \text{YX} = 2001$.

4. U jednakosti $** + *** = ****$ sve cifre su zamijenjene zvjezdicama . Odgonetnuti ovu jednakost, ako je poznato da se sva tri broja ne mijenjaju kada im se cifre zapišu u obrnutom poretku.

5. Sastaviti rebus koji ćeš dati drugu/drugarici iz klupe da riješi.

Napomena: Pri rješavanju prva četiri zadatka možeš da se konsultuješ sa drugom/drugaricom iz klupe.

Stanislavka Aprcović, JU OŠ „Štampar Makarije“, Podgorica

HAJDELBERG LAUREAT FORUM

(jubilarni 10. forum)

„Hajdelberg laureat forum“ (HLF) je svjetska konferencija mladih naučnika, koji ima za cilj da umreži mlade istraživače iz srodnih oblasti, a sve u cilju popularizacije matematike i kompjuterskih nauka. Laureati najvećih svjetskih priznanja iz ovih oblasti su predavači na forumu. Takođe, bitno je pomenuti da taj odnos nije u relaciji predavač slušalac. Bogatim i sadržajnim programom, radionicama, slobodnim aktivnostima svi učesnici i laureati upućeni su gotovo cijeli dan jedni na druge. Forum se održava svake godine u posljednjoj sedmici septembra u Hajdelbergu. Hajdelberg je evropski centar obrazovanja sa univerzitetom starim gotovo 640 godina i mnogobrojnim institutima i naučnim ustanovama koje svoje djelovanje vežu za gotovo sve oblasti nauke. Mnogi saradnici ili naučni radnici ovih naučnih institucija dobitnici su Nove-lovih nagrada, Fildsovih, Abelovih, ACM, Nevalina, Tjuringovih, itd. Nevjerojatno je da nijesmo kao društvo više upućeni na taj zaista fascinantan grad.



Istakao bih da je ova sedmodnevna manifestacija i ove godine ugostila 200 mlađih naučnika iz skoro 60 zemalja svijeta. Učesnike su birali na osnovu prijava koje su zavrijedile njihovu pažnju. Kandidati su podijeljeni u tri grupe: magistranti, doktoranti i postdoktoranti.

Osim organizacije koja je na jako visokom nivou, oduševio me i koncept same konferencije. Naime, laureati su većinu vremena provodili sa nama tako što smo imali organizovane radionice sa manjim brojem ljudi. Večere i ručkovi bili su tako koncipirani da smo i tu imali zajedničkih aktivnosti u kojima je nekada tema bila nauka, a nekada životno iskustvo i savjetovanje. Tih nedjelju dana ste u interakciji sa svima, razgovarate, učite o drugima, njihovoj kulturi i obrazovnom sistemu, ali govorite i o sebi. I to je jedinstvena prilika da tako otvoreno i slobodno možete da govorite sa ljudima koji su naučnici tog renumeia i dobitnici najvećih nagrada u svojim poljima. Mnogo aktivnosti i zanimljivih radionica pripremili su nam bivši učesnici prethodnih 9 foruma. Njih 20 je unijelo potpuno nov koncept koji se oslanja na novine i inovacije, dok je podrška svemu tome upravo iskustvo koje su stekli na prethodnim forumima. Za mene lično učešće na HLF-u znači mnogo. Iskustvo koje sam stekao u Hajdelbergu primjenjivo je u učionici, kako u organizaciji nastave tako i u nastavi, posebno u onom integrativnom dijelu i u polju digitalizacije.

To je bila prilika da se predstavi i rad Udruženja, kao i da učesnicima podijelim neke brojeve našeg časopisa. Posebno bih istakao da je dio časopisa otišao u Brazil kao poklon profesoru matematike Mateusu Kardosu, koji se zainteresovao za naš rad i to kako mi popularizujemo matematiku kod učenika.

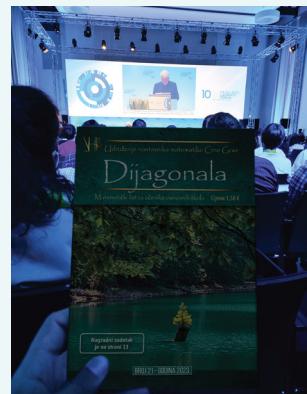
Razgovarao sam i sa g-dinom Jefimom Zelmanovim, dobitnikom Fildsove medalje. Jedna od oblasti u kojima djeluje je kombinatorika pa su savjeti da bi

osim logičkih zadataka djeci u što ranijim uzrastima potrebno nuditi kombinatorne tehnike kako bi se kvalitetnije razvijali kao matematičari. Mislim da je prilika da se čuje o obrazovnom sistemu u Crnoj Gori iskorištena, kao i prilika da se čuje za naš časopis i Udruženje. Svakako sam i ja sam imao priliku da naučim mnogo i neke novine donesem u CG.

Ono što je bilo u centru ovogodišnjeg foruma je intezivni razvoj vještacke inteligencije (AI), kao i pozicija matematike u IT eri.

U nastavku pogledajte fotografija koje će dočarati dio atmosfere sa 10. HLF-a.

Nikola Radojičić, JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić



GALILEO GALILEJ

(1564 – 1642)

/Galileo Galilei/

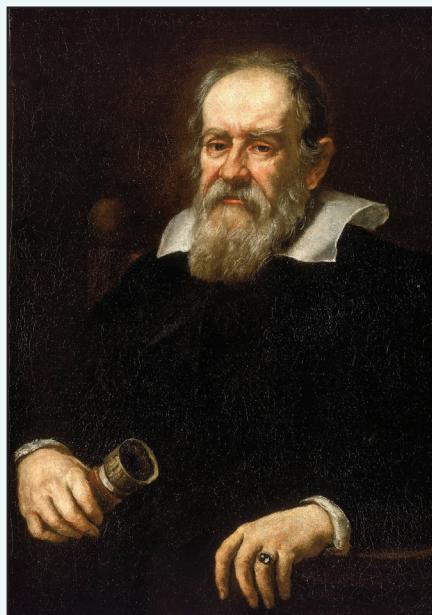
„Kada se otkriju, sve istine je
lako razumjeti. Teško je otkriti ih.“

Galileo Galilej je bio astronom, fizičar, matematičar i filozof italijanskog porijekla. Jedan je od najznačajnijih ljudi u istoriji nauke. Smatra se ocem savremene astronomije. Galileo je unaprijedio teleskop i došao do mnogih otkrića u astronomiji kao što su Jupiterovi sateliti, Sunčeve pjege, Mjesecove krateri i Mlijecni put.

Galileo Galilej je rođen u Pizi 15. februara 1564. godine. Obrazovanje je stekao u manastiru Volombroza pored Firence, a studirao je na univerzitetu u Pizi. Po želji svoga oca Galileo je studirao medicinu, ali kada je napunio 18 godina, ustanovio je da je matematika zanimljivija i tada je promijenio svoj životni poziv. Matematika je takođe po njegovom mišljenju imala značajniju ulogu u razumijevanju svijeta.

Galileo je bio najpoznatiji po njegovim astronomskim dostignućima. On je prvi naučnik koji je proučavao nebo pomoću teleskopa i otkrivaо istine na koje ljudi do tada nijesu željeli da se osvrću. Imao je čvrst stav o tome da se istina može dokučiti samo putem eksperimenata i posmatranja, ali su ga ta ubjedjenja dovela do otvorenog sukoba sa vjerskim poglavarima toga doba. „Eppur si muove“ („Ipak se okreće“) su riječi koje je 69-godišnji Galileo navodno prošaputao dok su mu predstavnici Inkvizicije izricali presudu: „Kriv za jeres...“. Još kao student, Galileo je zaradio nadimak „svađalica“ zbog toga što je vatreno zastupao svoje mišljenje i svoje teorije i zato što nikada nije htio da prizna da nije u pravu.

Galileovi učenici bili su matematičari: Benedeto Kasteli i Evandelistu Toričeli, a veoma snažan uticaj imao je na Isaka Njutna, Džona Miltona, Roberta Bojla.



ZANIMLJIVOSTI

Nakon što je preminuo Galileo je sahranjen u bočnoj kapeli crkve Santa Kroče u Firenci. Skoro vijek kasnije, 1737. godine, njegovi posmrtni ostaci su ekshumirani kako bi se premjestili na počasno mjesto u bazilici Santa Kroče i tom prilikom su mu uzeta tri prsta i dva zuba. Vjerovalo se da su prsti i zubi Galilea Galileja izgubljeni početkom 20. vijeka. Ipak, 2009. godine pojavili su se na aukciji. Treći prst poznatog astronoma nalazi se od početka 19. vijeka po raznim muzejima Italije.

Galileo je postao slavan još i prije njegovog profesorskog zvanja. Dok je jednog dana sjedio u mjesnoj katedrali, njegovu pažnju privuklo je njihanje lustera. Naime koristeći svoje otkucaje srca kao vremensku odrednicu primjetio je da je lusteru potrebno potpuno isto vrijeme da napravi zamah, ma koliko da je luk kojim se njihao bio dugačak. To ga je navelo na eksperimente sa njihanjem tegova. On je u eksperimentu koristio dva klatna iste dužine. Prvo je zaljuljao jače, a drugo slabije. Rezultat koji je dobio potvrdio je njegove sumnje: i jednom i drugom klatnu je bilo potrebno isto vrijeme da napravi zamah. Kao rezultat ovog otkrića izumljen je časovnik sa klatnom.

Jedan zanimljivi eksperiment povezuje ovog znamenitog naučnika i poznati Krivi toranj u Pizi. Aristotelov osnovni zakon kretanja glasi, ako padaju dva tijela različite težine, ono koje je teže pašće brže od lakšeg. Galileo je pokušao da pokaže da Aristotelova tvrdnja nije tačna, zato je jednog dana 1589. godine na vrh Krivog tornja iznio dva topovska đuleta, od kojih je jedno bilo duplo teže od drugog. Oba đuleta je bacio istovremeno sa vrha tornja, i ona su istovremeno pala na zemlju. Tako je Galileo dokazao svojim kolegama i saradnicima, koji su se okupili u podnožju tornja, da je njegova tvrdnja tačna i da Aristotel nije bio u pravu.

Ubrzo poslije Galileove smrti, engleski fizičar Robert Bojl je napravio eksperiment kojim je potvrdio da je Galileovo tvrđenje tačno.

Kada je Galileo 1581. godine primljen na Univerzitet u Pizi, cio nastavni program se zasnivao na sholastičkim principima. Sholastika je bio pokret koji je pokušavao da pomiri antičku filozofiju i srednjevjekovnu hrišćansku teologiju. Bio je to instrument i metod učenja koji je stavljao akcenat na iznošenje argumenata u raspravama.



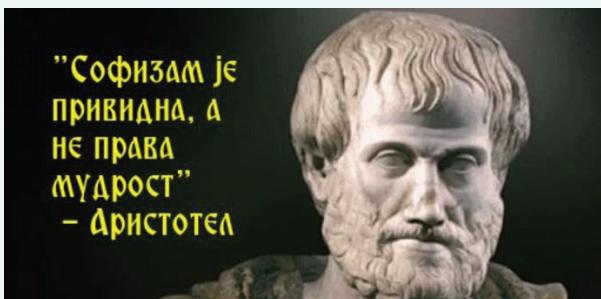
Galileo pred sudom

Godine 1992, 369 godina nakon suđenja Galileu održanog 1633. godine, u kome je Galileo osuđen za jeres, Vatikan je zvanično priznao grešku koju je napravio osudivši ovog naučnika. Sam Papa Jovan Pavle II je priznao da je Galileo bio odani katolik i naučnik od velikog značaja i da se mora uložiti iskreni napor da bi se pomirile razlike između nauke, filozofije i teologije.

Pripremile: Milica Radan i Andela Stojanović IX-3,
učenice OŠ „Pavle Rovinski“, Podgorica

Radomir Božović

MATEMATIČKI SOFIZMI (LAŽNI DOKAZI)



Sofizam je obrazloženje koje se koristi da potkrijepi svaku absurdnu pretpostavku ili izjavu koja je u suprotnosti sa činjenicama i dobro poznatim tvrđenjima.

Od trenutka kada se pojavio, sofizam je bio povezan s idejom namjernog krivotvorenja. Ovo se zasnivalo na mišljenju poznatog filozofa Protagore. Smatrao je zadatkom sofista da najgori argument prikaže kao najbolji, koristeći trikove u govoru. Odnosno, da ne treba da brinete o postizanju istine, već o uspjehu. Važno je pobijediti u raspravi, sporu, parnici, a ne utvrditi istinitost teze.

Kao tehniku, sofizam je uvela grupa starogrčkih mislilaca koji su sebe nazivali **sofistima**. Učili su bogatu omladinu retorici, javnom govoru i umijeću rasprave. Tako su pripremali učenike za dalju političku ili drugu karijeru.

Sofisti su vrlo često bili optuživani za subjektivni pristup i relativizaciju tema o kojima se raspravljalio. Drugi su filozofi, u većini slučajeva, o njima govorili omalovažavajuće. Na primjer, Aristotel je smatrao da sofizam nije podučavanje, već „trener”, odnosno njegov cilj nije bila naučna potraga za istinom, već jednostavno pobjeda u sporu na bilo koji način, pa je Aristotel sofizme nazvao „imaginarnom mudrošću”.

Sofizmi u matematici su isto što i „lažni dokazi”. Prilikom dokazivanja se namjerno preskaču neke matematičke činjenice ili tvrđenja. U sljedeća dva primjera ćemo dati „dokaze” (sofizme) da je $1 = 2$. Na vama je da otkrijete greške!

TEOREMA

Dokazati da je $1 = 2$

Dokaz:

Prvi način: Prepostavimo da je $a = b$, i pomnožimo obije strane sa a .

Dobijamo:

$a^2 = ab$. Oduzmemmo li od lijeve i desne strane b^2 dobijemo:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Na lijevu stranu jednakosti ćemo primijeniti formulu za razliku kvadrata, a na desnoj strani izvlačenje zajedničkog činioca:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$(a - b)(a + b) = b(a - b).$$

Podijelićemo izraz sa $(a - b)$ i dobijemo:

$a + b = b$. Međutim, kako je $a = b$, to je

$a + a = a$, odnosno $2a = a$. Podijelimo li obije strane izraza sa a dobijemo

$$2 = 1,$$

„što je trebalo dokazati“!

Drugi način: Znamo da kod kvadriranja važi $a^2 = (-a)^2$.

$(-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$. Transformisaćemo dati izraz:

$$(\frac{1}{2} - 1)^2 = (1 - \frac{1}{2})^2.$$

Korjenjujemo lijevu i desnu stranu izraza i dobijamo:

$$\frac{1}{2} - 1 = 1 - \frac{1}{2}, \text{ pa je}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1, \text{ odnosno } 1 = 2.$$

Radomir Božović, profesor

Spisak prvih 5 učenika koji su tačno riješili nagradni zadatak sa naslovne strane iz prošlog broja Dijagonale. Sve njih Redakcija nagrađuje besplatnim primjerkom Dijagonale 22.

1. Anđela Đukanović, učenica VII - 1, JU OŠ „Milija Nikčević”, Nikšić
2. Dara Mićković, učenica VII - 5, JU OŠ „Oktoih”, Podgorica
3. Novak Savić, učenik VII - 1, JU OŠ „Jugoslavija”, Bar
4. Ivana Boričić, učenica VII razreda, JU OŠ „Vuk Karadžić”, Berane
5. Marija Mia Maraš, učenica IX - 3, JU OŠ „Milan Vukotić”, Zeta

Štampanje ovog broja pomogli su:



DOMEN d.o.o.
PODGORICA



Imate prijatelje!
MTEL d.o.o. – PODGORICA



BEMAX

BEMAX d.o.o.
PODGORICA

HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale“ će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.

Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**“ i „**Narodnoj knjizi**“. Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **510-206991-61** kod CKB banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcg.wordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536-5851

