Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €

MEĐUŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

BROJ 24 - GODINA 2024.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 24**

Godina 2024. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik: *mr Radomir Božović*

Odgovorni urednik: *Danijela Jovanović*

Redakcija: *Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Anđa Vujović, Milan Rosandić, Nikola Radojičić, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*

Lektura: *Milja Božović, prof.*

Korektura: *Danijela Jovanović, prof.*

Priprema za štampu: *Branko Gazdić*

Tiraž: *1000*

Štampa: *„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

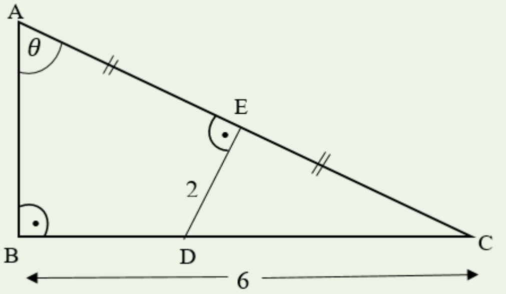
Sadržaj

Irena Pavićević, prof.

ZADACI IZ GEOMETRIJE

Trougao je, naizgled, jednostavna figura. Međutim, trougao ima mnogo zanimljivih osobina, koje su međusobno povezane, a čiji odnosi se otkrivaju i rješavaju kroz zadatke različite težine. Zadaci sa geometrijom trougla često znaju da budu na takmičenjima, i nijesu ni malo laki. U narednom prilogu smo za vas pripremili nekoliko zadataka, od kojih su neki bili na prestižnim međunarodnim takmičenjima.

1. Izračunati veličinu nepoznatog ugla θ na slici (Švedska matematička olimpijada).



Rješenje:

Traži se ugao kod tjemena A = $\boldsymbol{\theta}$. Iz tačke E spustimo normalnu duž EF na stranicu BC (vidjeti Sliku 1).

Označimo $\measuredangle C = \alpha = 90^o - \theta$. Takođe je $\measuredangle CEF = \measuredangle CAE = \theta$, kao uglovi sa paralelnim kracima, dok je $\measuredangle DEF = \alpha = 90^o - \theta$.

Označimo: AE = CE = a i DF = y. Posmatrajmo trouglove ΔABC i ΔEFC:

$\measuredangle ABC = \measuredangle EFC$ i $\measuredangle ACB = \measuredangle ECF \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EFC$.

Iz sličnosti trouglova dobijamo:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{2a} = \frac{y}{a} \Longrightarrow AB = 2y.$$

Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao DEF:

$$DE^2 = DF^2 + EF^2$$

$$2^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{.................} \quad (1)$$

Posmatrajmo trouglove ΔABC i ΔDFE. Uočavamo da je:

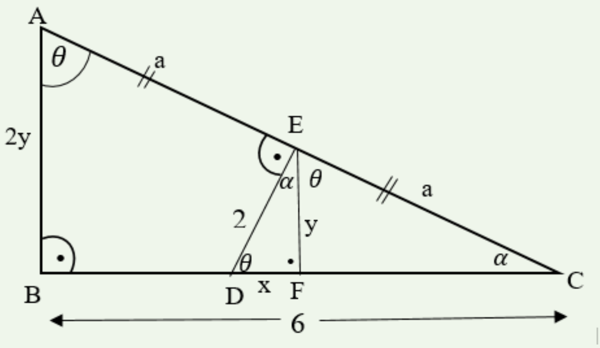
$$\measuredangle ABC = \measuredangle DFE = 90^o \text{ i } \measuredangle ACB = \measuredangle DEF = \alpha \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DFE.$$

Tada je:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE} \Rightarrow \frac{2y}{6} = \frac{x}{y} \Longrightarrow y^2 = 3x \quad \text{.......} \quad (2)$$

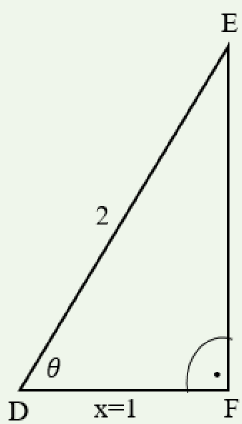
Iz (1) i (2), odnosno $(x^2 + y^2 = 4 \ \land \ y^2 = 3x)$, slijedi:

$$x^2 + 3x = 4$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$x^2 + 4x - x - 4 = 0$$
$$x(x+4) - (x+4) = 0$$
$$(x+4)(x-1) = 0$$
$$x + 4 = 0 \lor x - 1 = 0$$
$$x = -4 \lor x = 1 \Rightarrow x = 1$$

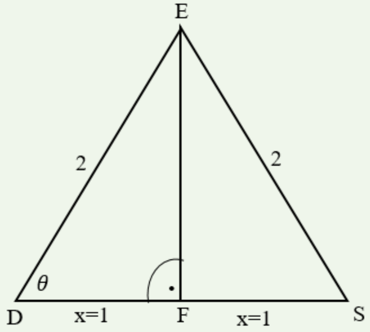


Slika 1

Posmatrajmo ΔDEF.



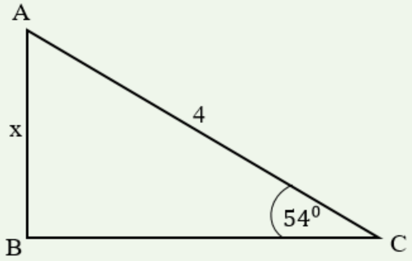
Možemo ga preslikati preko stranice EF i dobijamo trougao ΔEFS.



$ES = ED = 2$ i $DF = FS = 1 \Rightarrow DE = ES = DS = 2.$

Dakle, trougao EDS je jednakostranični, pa je $\theta = 60°$.

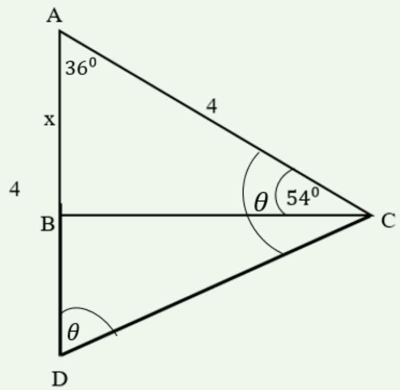
2. Odrediti veličinu stranice x na slici.



Rješenje:

Lako se računa $\measuredangle A = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 54^{\circ} = 36^{\circ}$.

Produžimo stranicu AB preko tjemena B tako da je AD = AC = 4 *cm*, tako da je ΔACD jednakokraki.



$$2\theta = 180^{\circ} - 36^{\circ} = 144^{\circ} \;\Rightarrow\; \theta = 72^{\circ}.$$

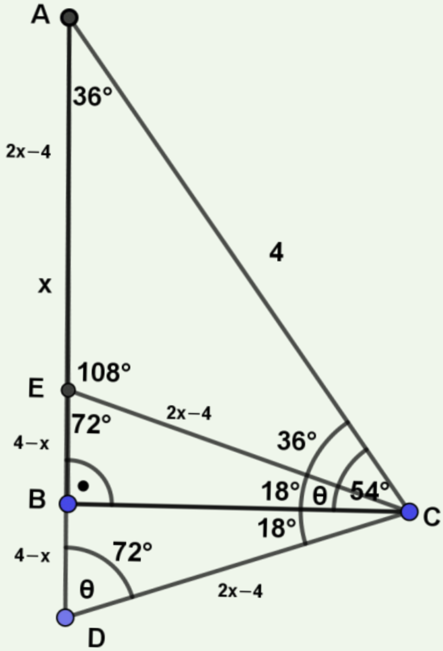
Takođe, $\measuredangle BCD = 72^{\circ} - 54^{\circ} = 18^{\circ}$.

Iz ΔABC je $AD = AB + BD \Rightarrow 4 = x + BD$, pa je BD = 4 – x .
Na stranici AB odredimo tačku E takvu da je BD = BE = 4 – x
(pogledajte Sliku 2).

AB = x i AE + BE = x, pa je:

AE + 4 – x = x, odnosno AE = 2x – 4.

Spojimo tačke E i C.



Slika 2

Posmatrajmo $\triangle\, CBD$ i $\triangle\, CBE$:

$\triangle\, CB = CB, \measuredangle\, CBD = \measuredangle\, CBE = 90^{o}$ i $BD = BE = 4 - \mathrm{x} \Rightarrow$

$\triangle\, CBD \cong \triangle\, CBE \Rightarrow \measuredangle\, CDB = \measuredangle\, CEB = 72^{o} \Rightarrow CD = CE.$

$\measuredangle\, AEC = 180^{o} - 72^{o} = 108^{o}$

$\measuredangle\, ACE = 180^{o} - 108^{o} - 36^{o} = 36^{o} \Rightarrow AE = CE = 2\mathrm{x} - 4 = DC$

$\measuredangle\, ECB = 54^{o} - 36^{o} = 18^{o}.$

Posmatrajmo $\triangle\, ADC$ i $\triangle\, CDE$:

$\measuredangle\, ADC = \measuredangle\, CDE = 72^{o}$ i $\measuredangle\, ACD = \measuredangle\, CDE = 72^{o}$

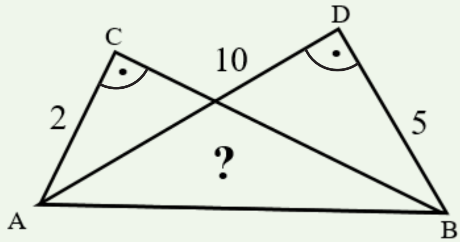
$\Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta CDE$. Tada je:

$\frac{AC}{DC} = \frac{CE}{DE}$, odnosno:

$$\frac{4}{2x-4} = \frac{2x-4}{2(4-x)}$$

$4 \cdot 2(4 - x) = (2x - 4)(2x - 4)$
$4 \cdot 2(4 - x) = 2(x - 2)2(x - 2)$
$2(4 - x) = (x - 2)(x - 2)$
$8 - 2x = x^2 - 4x + 4$
$x^2 - 2x - 4 = 0$
$x^2 - 2x + 1 - 1 - 4 = 0$
$(x - 1)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$
$\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)\left(x - 1 + \sqrt{5}\right) = 0$
$x = 1 + \sqrt{5}\,, x = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}.$

3. Izračunati površinu označenog trougla na slici (Francuska matematička olimpijada).



Rješenje:

Primijenimo Pitagorinu teoremu na ΔABD:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow AB = 5\sqrt{5}.$

Primijenimo Pitagorinu teoremu na ΔABC:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 \Rightarrow CB = 11.$

Označimo na slici tačku E (vidjeti Sliku 3):

Posmatrajmo ΔAEC i ΔBED:

$\measuredangle\, ACE = \measuredangle\, BDE = 90^o$ i $\measuredangle\, AEC = \measuredangle\, BED$ – unakrsni uglovi

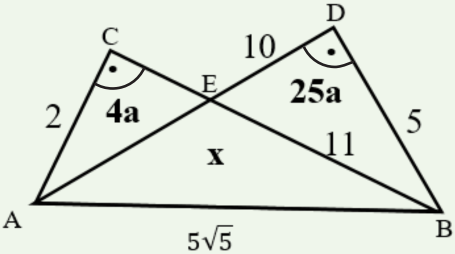
$\Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta BED.$

$\frac{P_{\Delta AEC}}{P_{\Delta BED}} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$P_{\Delta AEC} = 4a$

$P_{\Delta BED} = 25a$

Označimo $P_{\Delta AEB} = x$



Slika 3

$$P_{\Delta ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = 11$$

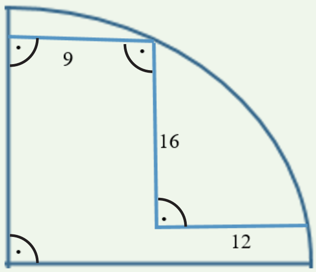
$4a + x = 11$ .... (1)

$$P_{\Delta ADB} = \frac{BD \cdot DA}{2}$$

$x + 25a = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$ .... (2)

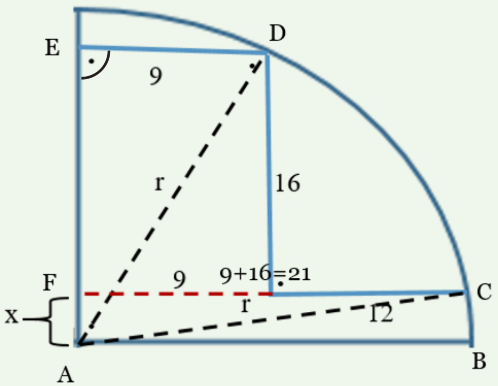
Iz sistema (1) i (2) dobijamo: $a = \frac{2}{3}, x = \frac{25}{3}$, pa je tražena površina $\frac{25}{3}$.

4. Izračunati poluprečnik četvrtine kruga sa slike.



Rješenje:

Označimo tačke A, B, C, D, E i F kao na Slici 4. Duži AC i AD su poluprečnici. Duž FA označimo sa x.



Slika 4

Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao ADE: $9^2 + (16 + x)^2 = r^2$..(1)

Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao AFC: $9^2 + x^2 = r^2$ ....(2)

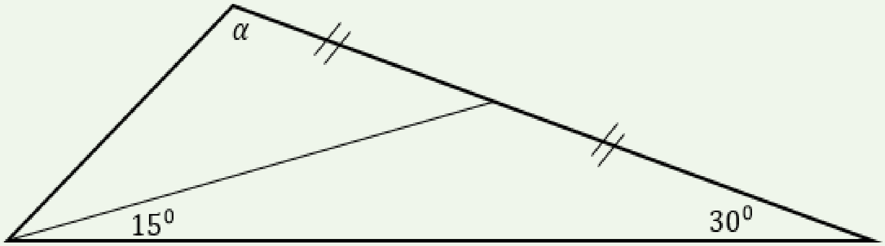
Iz (1) i (2) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} 9^2 + (16 + x)^2 = r^2 \\ 21^2 + x^2 = r^2 \end{cases}.$$

Rješavajući dati sistem dobijamo:

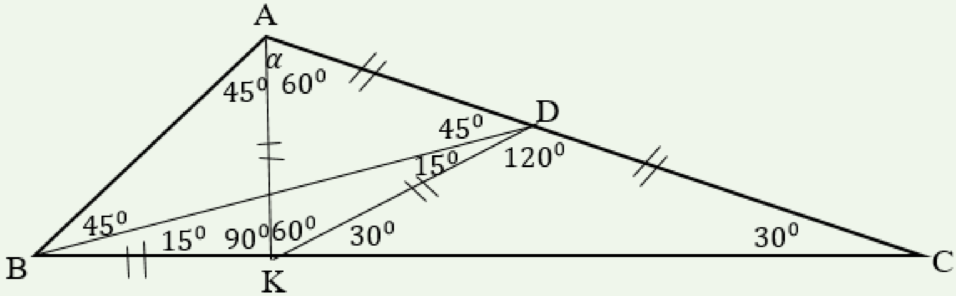
$$9^2 + (16 + x)^2 = 21^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{13}{4} \Rightarrow r = \sqrt{21^2 + x^2} = \frac{85}{4}.$$

5. Izračunati veličinu ugla α na slici.



Rješenje:

Označimo tjemena kao na slici:



Spustimo visinu AK na stranicu BC.

$\Delta\, AKC$ je pravougli sa oštrim uglovima 30^o i 60^o $\Rightarrow AK = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow AK = AD = DC$.

Duž KD je težišna duž pravouglog trougla AKC. Tada je:

$KD = AD = DC \Rightarrow \Delta\, AKD$ je jednakostraničan trougao

$\Rightarrow \sphericalangle\, KDA = \sphericalangle\, AKD = 60^o$.

$\Delta\, KDC$ je jednakokraki trougao $(KD = DC) \Rightarrow \sphericalangle\, DKC = \sphericalangle\, KCD = 30^o$.

Kako je u trouglu BKD, $\sphericalangle\, KBD = \sphericalangle\, KDB = 15^o \Rightarrow \Delta\, BKD$ je jednakokraki trougao $\Rightarrow BK = KD$. Trougao BKA je jednakokrako-pravougli trougao $(BK = KA) \Rightarrow \sphericalangle\, KBA = \sphericalangle\, KAB = 45^o$.

Sada lako zaključujemo da je $\alpha = 45^o + 60^o = 105^o$.

Irena Pavićević, JU OŠ „Štampar Makarije“, Podgorica

U prethodnim brojevima upoznali smo se sa programskim jezikom C++, a u narednom periodu ćemo raditi zadatke i uvježbavati naučeno.

Zadatak 1: Marko je počeo da vozi biciklo u 1 *h* 10 *min* 15 *s* i vozio ga je *m* sekundi. Napisati program koji učitava prirodan broj m (1 < m < 80000) i prikazuje sat, minut i sekund kada se Marko zaustavio.
Npr. za m = 3610 *s* odgovor je 2 *h* 10 *min* 25 *s*.

Rješenje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int m,h,minuti,s,t;
    cout << "Unesi koliko je sekundi vozio biciklo: " << endl;
            cin >> m;
            h = 1;
            minuti = 10;
            s = 15;
            t = 3600*1 + 10*60 + 15; // pretvaramo sve u sekunde
            t = t + m; // sabiramo sekunde
            h = t / 3600;  // računamo sate, minute i sekunde
            t = t – h * 3600;
            minuti = t / 60;
            s = t – minuti * 60;
            cout << "Zaustavio se u: " << h <<"h "<< minuti << "min " <<
            s << "s" << endl;
            //printf("%d %d %d ",h,minuti,s);
            return 0;
}
```

Zadatak 2: Napisati program koji učitava realan broj x i računa

$$y = \begin{cases} 5 - 2x, & za\ x \leq 0 \\ 5 + 3x, & za\ x > 0 \end{cases}.$$

Rješenje:

```
#include <iostream>
using namespace std;
```

```
int main()
{
    int x,y;
        cout << "Unesi x: " << endl;
        cin >> x;
    if(x<=0)
{
    y=5–2*x;
    }
    else
    {
        y=5+3*x;
    }
    cout << " Rezultat je: " << y << endl;
    return 0;
}
```

Zadatak 3: Napisati program koji učitava neparan broj n i na ekranu prikazuje kvadrat dimenzija n x n sastavljen od nula, a na dijagonalama su upisane jedinice. Npr. za n = 5 treba prikazati:

```
1 0 0 0 1
0 1 0 1 0
0 0 1 0 0
0 1 0 1 0
1 0 0 0 1
```

Rješenje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int n,i,j;
    cout << "Unesi n: " << endl;
    cin >> n;
    for(i=1;i<=n;i++)
    {
        for(j=1;j<=n;j++)
        {
            if(i==j||i+j==n+1)
```

```
            cout << "1";
                else{
                    cout << "0";
                }
        }
        cout << endl;
    }
    return 0;
}
```

Zadatak 4: Napisati program koji učitava prirodan broj n i niz od n cijelih brojeva, a zatim redom računa: zbir elemenata niza, najveći element niza, aritmetičku sredinu članova niza i zbir kvadrata elemenata niza. Npr.

Ulaz:	5	Izlaz:	25
	3 7 2 9 4		9
			5
			159

Rješenje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int n,i,s,mx,ar,zk;
    cout << "Unesi n: " << endl;
    cin >> n;
    int a[n];
    s=0;
    cout << " Unesi clanove niza: " << endl;
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        cin >> a[i];
    }
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        s=s+a[i];
    }
    cout << " Suma je: " << s << endl;
    mx=a[0];
```

```
        for(i=0;i<n;i++)
        {
                if(mx<a[i])
                {
                        mx=a[i];
                }
        }
        cout << " Maksimum je: " << mx << endl;
        ar=s/n;
        cout << " Aritmeticka sredina je: " <<  ar << endl;
        zk=0;
        for(i=0;i<n;i++)
        {
                zk=zk+a[i]*a[i];
        }
        cout << " Zbir kvadrata je: "<< zk << endl;
    return 0;
}
```

Zadatak 5: Napisati program koji učitava prirodan broj m (m > 2), a zatim ispisuje sve savršene brojeve od 2 do m. Broj je savršen ako je jednak sumi svojih djelilaca, isključujući njega samog. Npr. 28 je savršen broj, jer je 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Rješenje:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int m,i,s,k;
    cout << "Unesi m: " << endl;
        cin >> m;
        for(i=2;i<=m;i++)
        {
                s=0;
                for(k=1;k<i;k++)
                {
                        if(i%k==0)
                        {
                                s=s+k;
                        }
```

```
            }
            if(i==s)
            {
                        cout << "Broj: " << i << " je savrsen" << endl;
            }
      }
      return 0;
}
```

ZADACI ZA VJEŽBU

1. Napisati program koji će izračunati zbir dva data ugla. Ugao se zadaje sa dva broja od kojih prvi predstavlja stepene, a drugi broj predstavlja minute.
2. Napisati program koji učitava realan broj x i računa
$$y = \begin{cases} 7 - 6x, & za\ x \leq 1 \\ \dfrac{3x}{x+2}, & za\ x > 1 \end{cases}.$$
3. Napisati program koji učitava neparan broj n i na ekranu pomoću zvjezdica formira trougao kao što je prikazano za n = 5:

```
*
**
***
****
*****
```

4. Napisati program koji učitava prirodan broj n i niz od n cijelih brojeva, a zatim računa razliku između zbira kvadrata svih parnih brojeva toga niza i zbira kvadrata svih neparnih brojeva toga niza.
5. Napisati program kojim se štampaju svi trocifreni Amstrongovi brojevi. Broj je Amstrongov ako je jednak zbiru kubova svojih cifara.
6. Napisati program kojim se štampaju svi trocifreni brojevi koji imaju osobinu da su djeljivi brojem koji se dobija izbacivanjem njegove srednje cifre. Npr. N = 121 je djeljivo sa 11 (kad izbacimo 2 iz 121, dobijamo 11).
7. Ana je trebala da zapamti tri tajna prirodna broja A, B, C $(A \leq B \leq C)$. Ona je sračunala zbirove $A + B,\ A + C,\ B + C,\ A + B + C$ i zapisala na posebne listove. Ako imate Anine zbirove u nekom poretku napišite program koji će otkriti Anine tajne brojeve. Na primjer, za ulaz $21, 17, 26, 14$ brojevi su $A = 5,\ B = 9,\ C = 12$.

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

Razlomci. Mjerenje zapremine.

1. Izračunati (skratiti do nesvodljivog razlomka ili pretvori u mješoviti broj ako je to moguće):

   $a)\ 2-2\cdot 0{,}2$; $b)\ 3{,}3+0{,}7\cdot 2{,}5$; $c)\ \frac{3}{7}\cdot(0{,}5+\frac{2}{3})-0{,}2$;

   $d)\ \frac{1}{6}+\frac{7}{12}:\frac{14}{15}-\frac{1}{8}$; $e)\ (20{,}4-0{,}256):0{,}32$; $f)\ 0{,}6-\frac{1}{5}:\left(\frac{2}{7}+1\frac{5}{7}\right)$;

   $g)\ \left(3{,}2-2\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{12}{13}-\frac{2}{13}$.

2. Izračunati vrijednost izraza:

   $a)\ \left(2\cdot\left(0{,}75+\frac{3}{4}\right)-0{,}5\right):1\frac{1}{8}+\frac{7}{9}$; $b)\ \frac{2}{7}\cdot(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-0{,}25)+0{,}25\cdot 0{,}4$.

3. Riješiti jednačine i nejednačine (rješenje predstaviti na br. polupravoj):

   $a)\ 3:x=\frac{1}{3}$; $d)\ 0{,}2\cdot x\geq 0{,}3$;

   $b)\ x\cdot\left(2{,}4-\frac{2}{5}\right)=1$; $e)\ \frac{4}{5}\geq 0{,}2+0{,}2\cdot x$;

   $c)\ 2{,}75-0{,}75\cdot\left(0{,}6\cdot x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}$; $f)\ 0{,}45+0{,}25\cdot x+0{,}55<2$.

4. Kojim brojevima možemo pomnožiti razliku brojeva $2\frac{1}{4}$ i 1,5 da bi dobijeni proizvod bio veći od zbira datih brojeva?

5. Za koliko se proizvod zbira i razlike brojeva 2,6 i $1\frac{1}{5}$ razlikuje od količnika brojeva $7\frac{1}{7}$ i 3,5?

6. Odrediti za koliko se razlikuju obimi, a za koliko površine pravougaonika ako su stranice jednog 6,8 *cm* i 2,75 *cm*, a drugog 5,45 *cm* i 3,05 *cm*.

7. Napisati u obiku decimalnog zapisa: a) 2%; b) 125%; c) 37,5%.

8. U jednoj prodavnici obuće broj prodatih pari cipela je dat po danima:

DAN	P	U	S	Č	P	S
BROJ PRODATIH PARI CIPELA	77	59	67	83	101	75

Kolika je prosječna dnevna prodaja?

9. Filip i Nikola zajedno imaju 25 klikera. Koliko će klikera dobiti svaki od njih ako dijele klikere u razmjeri 2 : 3?

10. U prodavnici je cijena patika snižena za 20%. David je platio svoje patike po sniženoj cijeni od 120 eura. Kolika je prvobitna cijena patika?

11. Kvadar, čije su stranice $a = 0{,}3\ dm$, $b = 0{,}6\ dm$ i $c = 1\ dm$, ima površinu jednaku površini kocke. Ko ima veću zapreminu - kocka ili kvadar?

Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

I grupa

1. a) Izračunati: $2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{5}$.

   b) Koliko je 7% od 350?

   c) Riješiti jednačinu: $3 \cdot x = 0{,}6$.

2. a) Biciklista je prešao jednog dana 58,4 *km*, drugog 60,8 *km* i trećeg 75,2 *km*. Koliko je kilometara prosječno prelazio u toku jednog dana?

   b) Od 120 učenika njih 40% je odličnih, 20% vrlo dobrih, 15% dobrih, a ostalo su dovoljni. Koliko je učenika sa dovoljnim uspjehom?

3. a) Koje brojeve možemo podijeliti razlikom brojeva 0,5 i $\frac{1}{3}$ tako da dobijeni količnik bude veći od zbira brojeva 1 i 0,2?

   b) Riješiti jednačinu: $\left(1\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) : \frac{6}{7} = 3{,}5$.

4. Poslije sniženja od 20% cijena proizvoda je 18,40 €. Kolika je bila cijena prije sniženja?

5. Izračunati koliko pakovanja čaja dimenzija 1,5 *dm*, 8 *cm* i 6 *cm* može da stane u kutiju dimenzija 30 *cm*, 8 *dm* i 12 *cm*.

II grupa

1. a) Izračunati: $3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9}$.

   b) Koliko je 5% od 250?

   c) Riješiti jednačinu: $0{,}4 \cdot y = 5$.

2. a) Filip je vozeći bicikl prešao jednog dana 48,4 *km*, drugog 70,8 *km* i trećeg 75,2 *km*. Koliko je kilometara prosječno prelazio u toku jednog dana?

   b) Od 150 kolača 15% je sa čokoladom, 25% je sa malinama, 20% je sa višnjama, a ostalo su kolači sa orasima. Koliko je kolača sa orasima?

3. a) Kada $2\frac{1}{5}$ uvećamo za $\frac{2}{3}$ nepoznatog broja, dobija se broj koji je za 0,5 veći od 3. Odrediti nepoznati broj.

   b) Riješiti nejednačinu i rješenja predstaviti na brojevnoj polupravoj: $2\frac{5}{12} - 0{,}25x \leq 1\frac{1}{6}$.
4. Nakon poskupljenja od 20% cijena nekog proizvoda iznosi 16,10 eura. Koja je cijena proizvoda bila prije poskupljenja?
5. Daska ima dimenzije 5 *m*, 25 *cm* i 2 *cm*. Koliko dasaka treba složiti da njihova zapremina bude $1m^3$?

Sanja Stevović, JU OŠ „Drago Milović“, Tivat

VII razred

Skup Q. Četvorougao. Elementarno kombinatorni zadaci.

1. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $\left(-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}$; b) $-0{,}2 + 0{,}5 : 5$; c) $-3\frac{1}{2} - 0{,}5 : \frac{3}{4} + 3{,}5$;

   d) $\frac{6-8{,}4:0{,}1}{\left(2:0{,}3-4\frac{2}{3}\right)\cdot 0{,}3}$; e) $\frac{3}{5} - 2\cdot\left\{\frac{1}{2} - \left[0{,}75 - 10\cdot\left(0{,}625 - \frac{5}{6}\right)\right]\right\}$.

2. Sastaviti izraz i izračunati njegovu vrijednost:

   a) Zbir brojeva $-3\frac{1}{3}$ i 2,25 podijeliti brojem $-1{,}5$.

   b) Broju $\frac{9}{10}$ dodati proizvod brojeva $-0{,}5$ i $\frac{1}{2}$, pa zbir umanjiti za 2,3.

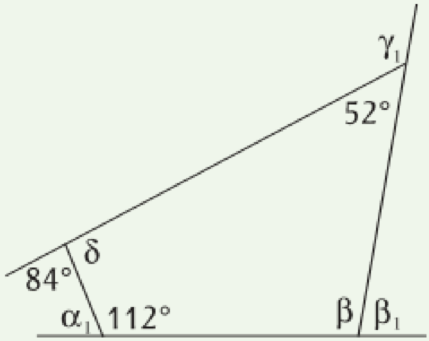
   c) Od broja -5 oduzeti količnik razlike brojeva 1 i 0,75 i zbira brojeva $-0{,}5$ i $\frac{1}{3}$.
3. Riješiti jednačine: a) $\frac{2}{3}x = -0{,}75$; b) $x : \left(10\frac{3}{4} - 5{,}5\right) = -4$;

   c) $2(x-5) - 3(x+5) = 3x - 1$.
4. Turista je prešao $\frac{5}{14}$ puta. Ako pređe još 70 *km*, prešao je polovinu puta. Koliko iznosi cijeli put?
5. Riješiti nejednačine i skup rješenja prikazati na brojevnoj pravoj:

   a) $m : \frac{2}{5} > \frac{3}{4}$; b) $-\frac{8}{5}y < \frac{4}{5}$; c) $(2{,}5 - 4{,}6)\cdot x + 3{,}2 \geq -3{,}1$.

   d) $-2x - \frac{1}{2} \leq 1{,}5$; e) $4\cdot(1{,}5x - 1) - 0{,}5\cdot(x - 10) > 6x$.

6. Izračunati nepoznate unutrašnje i spoljašnje uglove četvorougla sa slike.



7. a) Izračunati uglove paralelograma ako je jedan od uglova za 42° veći od drugog ugla.

   b) Visina romba sa jednom stranicom obrazuje ugao od 30°. Odrediti uglove romba.

   c) U pravouglom trapezu jedan ugao je 70°. Odrediti ostale uglove tog trapeza.

   d) Zbir dva ugla jednakokrakog trapeza je 260°. Koliki su uglovi trapeza?

   e) Ugao kod tjemena B, koga obrazuju nejednake stranice deltoida iznosi 100°. Ako dvije jednake stranice obrazuju ugao od 78°, odrediti ostala dva ugla deltoida.

8. Konstruisati:

   a) kvadrat i opisati kružnicu oko tog kvadrata, ako je $d = 5$ *cm*;

   b) pravougaonik, čija je dijagonala 5 *cm* i ugao između dijagonala 60°;

   c) paralelogram, čije su stranice $a = 5$ *cm*, $b = 4$ *cm* i duža dijagonala 7 *cm*;

   d) romb ako je $a = 4$ *cm* i $\alpha = 120°$;

   e) trapez ABCD (AB i CD su osnovice) ako je AB = 6 *cm*, AD = 3 *cm*, $\alpha = 45°$ i $\beta = 60°$.

9. Putnik želi da putuje iz Tivta do Beograda, preko Podgorice. Od Tivta do Podgorice može putovati autom ili autobusom. Od Podgorice do Beograda može putovati autom, autobusom, vozom ili avionom. Na koliko načina može putnik putovati od Tivta do Beograda? Navesti sve moguće načine.

10. Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji počinju parnom cifrom, a završavaju se cifrom 3 ili 5?

Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

I grupa

1. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$;

   b) $1{,}8:(-3)-1{,}2+[1-0{,}9\cdot(-0{,}2)]$;

   c) $\left|\frac{5}{6}-2{,}5\right|:0{,}4+\left|-15{,}5+6\frac{1}{6}\cdot(-3)\right|$.
2. Riješiti jednačine:

   a) $-2y=0{,}6$; b) $5(x-2)+9(3x-1)=-4(x-3)+6(x-2)$.
3. Konstruisati paralelogram ako su zadate njegove stranice i ugao:
   AB = 5 *cm*, AD = 3 *cm* i α = 45°.
4. a) Visina romba polovi odgovarajuću stranicu. Izračunati uglove tog romba.

   b) Obim trapeza iznosi 50 *cm*, a zbir dužina njegovih krakova je 20 *cm*. Izračunati dužinu srednje duži.
5. Koliko ima trocifrenih brojeva čije su sve cifre različite?

II grupa

1. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $\frac{2}{9}:\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)$;

   b) $-2-4:5+[6:12-(-2{,}3)+1{,}7\cdot(-0{,}2)]$; c) $\dfrac{\frac{2}{3}-0{,}4\cdot4\frac{1}{6}}{|5+3{,}4:(-0{,}2)|}$.
2. Riješiti jednačine:

   a) $y:4=-0{,}6$;

   b) $-4\cdot(5x-2)+3(x-1)=-2\cdot(4-3x)+3\cdot(2x-1)-42$.
3. Konstruisati paralelogram ako su zadate njegove stranice i ugao:

   AB = 6 *cm*, BC = 3 *cm* i β = 105°.
4. a) Manja dijagonala romba jednaka je njegovoj stranici. Izračunati uglove tog romba.

   b) Osnovice trapeza se odnose kao 4 : 3, a dužina njegove srednje duži iznosi 17,5 *cm*. Odrediti dužinu manje osnovice.
5. Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji počinju sa dvije petice?

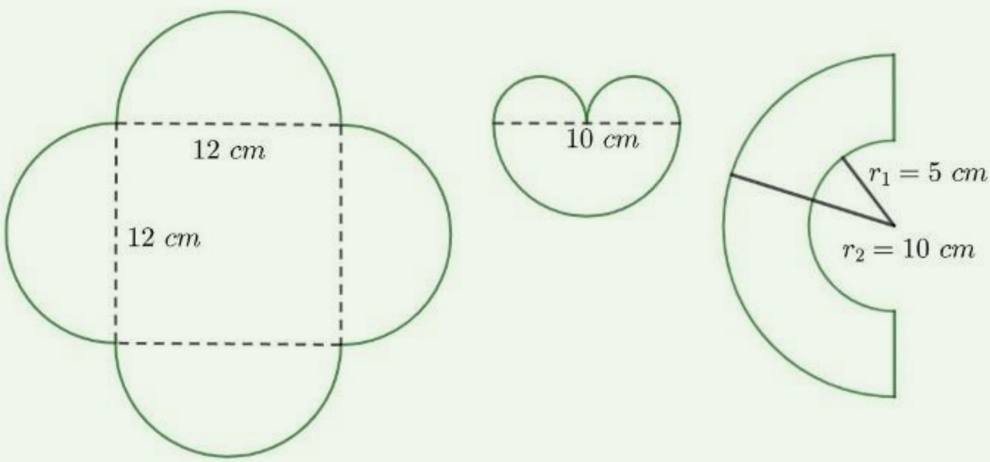
Sanja Popović, JU OŠ „Drago Milović“, Tivat

VIII razred

Površina trougla i četvorougla. Pitagorina teorema. Krug i kružnica

1. Izračunati visinu i obim romba ako su mu dužine stranice 25 *cm* i jedne dijagonale 48 *cm*.
2. Jedna stranica paralelograma čini 75% njoj odgovarajuće visine. Zbir te stranice i visine je 28 *cm*. Izračunati površinu tog paralelograma.
3. Izračunati obim i površinu romba čiji je jedan ugao 60° i dužina kraće dijagonale 6 *cm*.
4. Izračunati obim, površinu i uglove romba ako je visina romba dva puta manja od stranice i iznosi 2,8 *cm*.
5. Izračunati obim i površinu romba ako su ugao romba 150° i dužina:
   a) stranice 12 *cm*; b) visine 4,5 *cm*;
   c) poluprečnika upisane kružnice 1,5 *cm*.
6. Izračunati površinu romba i poluprečnik upisane kružnice ako su jedna dijagonala 48 *cm* i obim 104 *cm*.
7. Obim romba je 46,8 *cm*. Izračunati visinu romba ako je njegov obim za 1,8 *cm* veći od petorostruke vrijednosti jedne dijagonale.
8. Trapez ima osnovice dužina 12 *cm* i 6 *cm* i visinu 10 *cm*. Izračunati površine trapeza na koje srednja linija razlaže ovaj trapez.
9. Površina jednakokrakog trapeza je 36 cm^2, visina mu je 2 *cm*, a dužine osnovica su u razmjeri 5 : 4. Odrediti:
   a) dužine srednje linije i osnovica trapeza; b) uglove trapeza.
10. Dužine osnovica jednakokrakog trapeza su 15 *cm* i 9 *cm*, a ugao na jednoj osnovici je 45°. Izračunati površinu tog trapeza i dužinu kraka.
11. Pravougli trapez $ABCD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$) podijeljen je dijagonalom AC na dva jednakokraka trougla ABC i ACD. Izračunati površinu tog trapeza ako je $AD = 3,5$ *cm* i $AC = CB$.
12. Izračunati površinu pravouglog trapeza čiji su krak $c = 6\sqrt{3}$ *cm* i kraća osnovica b = 10 *cm*, ako je ugao na dužoj osnovici 30°.
13. Izračunati obim i površinu pravouglog trapeza $ABCD$ sa pravim uglom kod tjemena A, ako je njegova kraća dijagonala $AC = 5$ *cm*, duži krak $BC = 6$ *cm* i oštar ugao $\sphericalangle ABC = 30°$.
14. Površine kvadrata i romba su jednake. Ako je dijagonala kvadrata 8 *cm* i jedna dijagonala romba 4 *cm*, izračunati drugu dijagonalu romba.
15. Izračunati dužine dijagonala deltoida ako mu je površina 96 cm^2 i jedna dijagonala je tri puta duža od druge.
16. Izračunati centralni ugao određen kružnim lukom koji predstavlja dvanaestinu kružnice.

17. Luk AB je četvrtina kruga. Odrediti pod kojim uglom se vidi tetiva AB iz tačke M ako je ona sa one strane tetive gdje:
    a) je centar kruga; b) nije centar kruga.
18. Kraci šestara dugi 10 *cm* zatvaraju ugao od 60°. Odrediti koliki će biti poluprečnik kruga koji crtaju.
19. Na krug prečnika 1 *dm* postavljene su tangente sa dodirnim tačkama A i B. Ove tangente se sijeku i određuju ugao od 120°. Odrediti dužinu tetive AB i dužinu tangentnih duži.
20. Izračunati za koliko će se promijeniti obim kružnice ako se poluprečnik:
    a) smanji za 10 *cm*, b) poveća za 10 *cm*.
21. Dužina jedne katete pravouglog trougla je 8 *cm* i obim kružnice opisane oko tog trougla je 12 π *cm*. Izračunati težišnu duž i visinu koje odgovaraju hipotenuzi.
22. Izračunati obim i površinu kruga:
    a) opisanog oko kvadrata stranice 6 *cm*;
    b) upisanog u kvadrat stranice 6 *cm;*
    c) opisanog oko pravougaonika stranica 3 *cm* i 4 *cm*;
    d) upisanog u romb dijagonala 6 *cm* i 8 *cm*.
23. Izračunati koji procenat dužine kružne linije predstavlja luk sa periferijskim uglom od 75°. Ako je prečnik kruga 1 *m*, odrediti dužinu kružnog luka. (Računati: $\pi \approx 3{,}14$.)
24. Pozornica oblika kružnog isječka kruga K(S, 6 *m*) i odgovarajućeg centralnog ugla 40° puna je glumaca. Izračunati koliko ima glumaca na sceni ako na svakom m^2 stoje četiri glumca.
25. Izračunati obim i površinu figura (oivičenih zelenom) prikazanih na slici.



Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

Osnovni nivo

1. Izračunati obim i visinu romba ako su dužine njegovih dijagonala 14 cm i 48 cm.
2. Izračunati obim i površinu pravouglog trapeza kod koga su kraća osnovica 5 cm, visina 12 cm i krak 13 cm.
3. U krug poluprečnika 4 cm dat je periferijski ugao $\sphericalangle APB = 30°$. Odrediti dužinu tetive AB.
4. Izračunati obim i površinu opisanog i upisanog kruga:

   a) kvadrata stranice 10 cm; b) jednakostraničnog trougla stranice 6 cm.
5. Dat je krug poluprečnika 1 cm. Izračunati obim i površinu kružnog isječka koji predstavlja $\frac{5}{8}$ površine kruga.

Srednji nivo

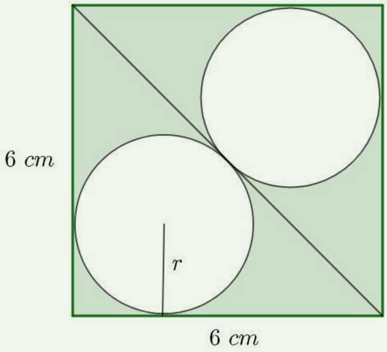
1. Izračunati obim romba površine 120 cm^2 ako mu se dijagonale odnose kao 5 : 12.
2. Jednakokraki trapez je sastavljen od jednog kvadrata površine 342 cm^2 i dva podudarna pravougla trougla čije su površine po 216 cm^2. Izračunati obim trapeza.
3. Stranica trougla je 10 cm, a ugao naspram nje je 150°. Izračunati dužinu prečnika kruga opisanog oko ovog trougla.
4. Obim kruga iznosi 200 π cm. Ako se obim poveća za 10%, odrediti za koliko će se procenata povećati površina kruga.
5. Izračunati površinu kružnog prstena koji određuju upisani i opisani krug jednakostraničnog trougla visine $12\sqrt{3}$ cm.

Viši nivo

1. Krak jednakokrakog trapeza je 16 cm, zbir osnovica je 30 cm i oštar ugao je 60°. Izračunati osnovice i površinu trapeza.
2. Jedna dijagonala romba jednaka je njegovoj stranici. Izraziti drugu dijagonalu u funkciji stranice romba.
3. U krug je upisan kvadrat stranice 6 cm. Odrediti da li je veća površina kvadrata ili površina dijela kruga van oblasti kvadrata.
4. Jedan od uglova trougla jednak je razlici druga dva ugla. Dužina najduže stranice trougla je 4 cm, a zbir površine kruga opisanog oko tog trougla i

površine kvadrata konstruisanog nad najkraćom stranicom trougla je 20 cm^2. Izračunati dužinu najkraće stranice.

5. Izračunati površinu obojane figure prikazane na slici.



Vesna Matković, JU OŠ „Drago Milović", Tivat

IX razred

Valjak. Kupa. Lopta. Prikazivanje podataka.

1. Površina valjka je $48\,\pi\ cm^2$, a površina njegovog omotača je $30\,\pi\ cm^2$. Izračunati zapreminu valjka.
2. Površina omotača valjka je $144\,\pi\ cm^2$, a visina valjka je dva puta veća od poluprečnika valjka. Izračunati zapreminu valjka.
3. Površina omotača i površina baze valjka se odnose kao $6 : 1$. Izračunati zapreminu valjka ako je njegova površina $200\,\pi\ cm^2$.
4. Odrediti površinu valjka ako su prečnik osnove $6\ cm$, a dijagonala osnog presjeka $10\ cm$.
5. Dijagonala osnog presjeka valjka zaklapa sa ravni osnove ugao od 30°. Ako je visina valjka $4\ cm$, izračunati njegovu površinu i zapreminu.
6. Izračunati površinu šupljeg valjka čiji su visina $H = 25\ cm$, poluprečnik spoljašnjeg omotača $r_1 = 15\ cm$, a unutrašnjeg $r_2 = 6\ cm$.
7. Od drvenog valjka poluprečnika osnove $9\ cm$ i visine $12\ cm$ istesana je najveća moguća pravilna trostrana prizma. Kolika je zapremina otpadaka?
8. Izračunati površinu prave kupe čija je zapremina $3\,\pi\ cm^2$, a površina osnove $3\,\pi\ cm^2$.

9. Obim osnove kupe je $6\,\pi\,cm$, a visina kupe je $4\,cm$. Izračunati izvodnicu, površinu i zapreminu kupe.
10. Površina omotača kupe je $60\,\pi\,cm^2$, a poluprečnik i visina kupe se odnose kao $3:4$. Odrediti površinu i zapreminu kupe.
11. Obim osnove prave kupe je $36\,\pi\,cm$. Izvodnica kupe nagnuta je prema ravni osnove pod uglom $45°$. Izračunati površinu i zapreminu kupe.
12. Pravougli trapez osnovica $40\,cm$ i $25\,cm$ i površine $650\,cm^2$ rotira oko veće osnovice. Naći površinu i zapreminu obrtnog tijela.
13. Površina pravilne jednakoivične šestostrane prizme je $\left(6+3\sqrt{3}\right)cm^2$. Izračunati zapreminu kupe čija je osnova upisana u osnovu prizme, a vrh je u središtu druge osnove prizme.
14. Površina lopte opisane oko pravilne četvorostrane prizme osnovne ivice $a=4\,cm$ je $36\,\pi\,cm^2$. Izračunati površinu dijagonalnog presjeka pravilne četvorostrane prizme.
15. Obim velikog kruga lopte je $36\,\pi\,cm$. Izračunati zapreminu lopte.
16. Poluprečnik lopte je $4\,cm$. Ako se poluprečnik poveća za $3\,cm$, za koliko će se povećati površina lopte?
17. Jedan oštar ugao pravouglog trougla je $30°$, a dužina hipotenuze je $12\,cm$. Odrediti površinu i zapreminu tijela koje nastaje rotacijom ovog trougla oko kraće katete.
18. Zapremina lopte je $288\,\pi\,cm^2$. Odrediti njenu površinu.
19. Jednakokraki trapez osnovica $13\,cm$ i $7\,cm$, visine $4\,cm$ rotira oko duže osnovice. Izračunati površinu i zapreminu dobijenog obrtnog tijela.

Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

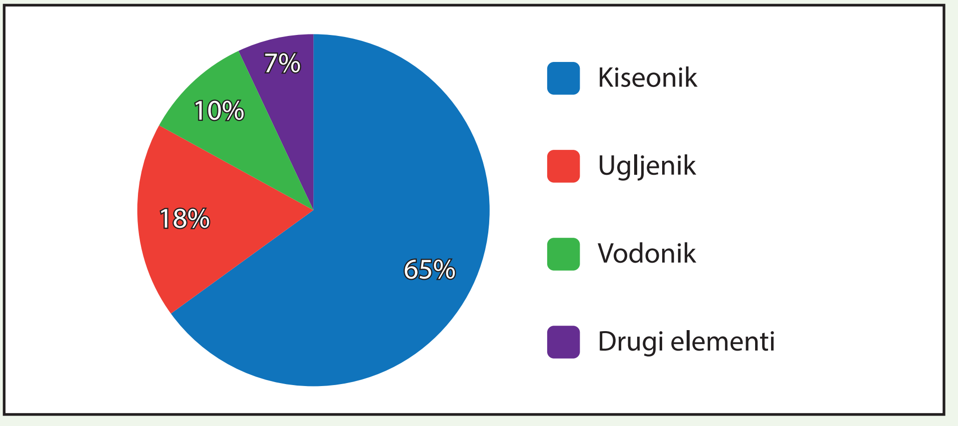
I grupa

1. Rješenje sistema jednačina $\begin{cases}2r+H=8\\3r-2H=5\end{cases}$ je uređeni par (r,H) pri čemu je r poluprečnik osnove, a H visina valjka izraženi u cm. Izračunati površinu i zapreminu tog valjka.
2. Osni presjek kupe je jednakostranični trougao površine $100\sqrt{3}\,cm^2$. Odrediti površinu i zapreminu kupe.

3. Rastojanje centra lopte od neke ravni koja je siječe je 6 cm. Ako je presjek te ravni i lopte krug površine 64 π cm^2, odrediti površinu lopte.
4. Pravougli trapez rotira oko prave kojoj pripada kraći krak. Izračunati površinu i zapreminu nastalog obrtnog tijela ako su mu dužine osnovica 10 cm i 6 cm, a oštar ugao trapeza 60^0.
5. Kružni dijagram prikazuje procenat nekih elemenata u čovječijem organizmu.

   a) Koji element je najzastupljeniji u organizmu?

   b) Ako je masa nekog čovjeka 80 kg koliko se kiseonika nalazi u njegovom organizmu?

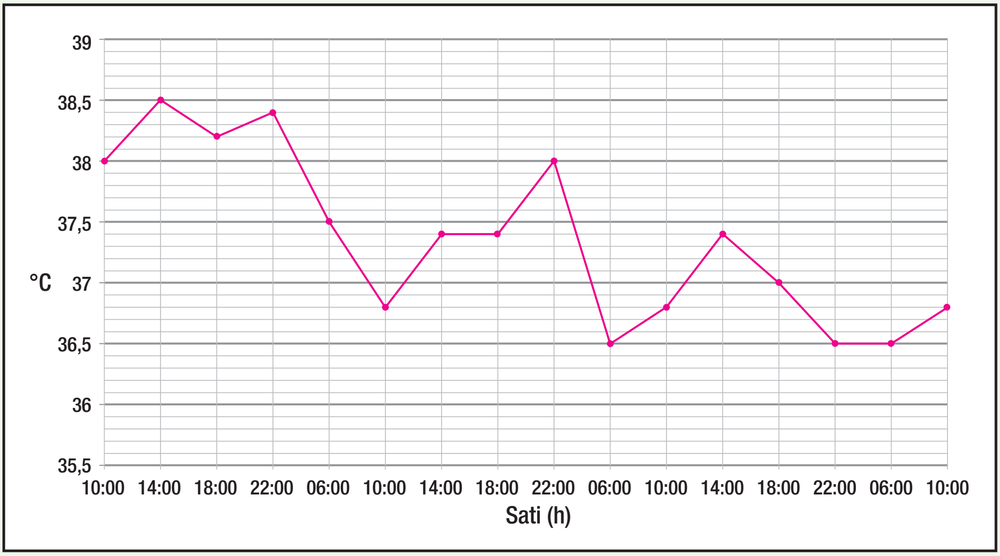


II grupa

1. Rješenje sistema jednačina $\begin{cases} 2r + 3H = 34 \\ 8r - 6H = -8 \end{cases}$ je uređeni par (r, H) pri čemu je r poluprečnik osnove, a H visina valjka izraženi u cm. Izračunati površinu i zapreminu tog valjka.
2. Osni presjek kupe je pravougli trougao površine 98 cm^2 . Odrediti površinu i zapreminu kupe.
3. Rastojanje centra lopte od neke ravni koja je siječe je 12 cm. Ako je presjek te ravni i lopte krug obima 18 π cm, odrediti zapreminu lopte.
4. Jednakokraki trapez osnovica 8 cm i 4 cm i oštrog ugla 45°, rotira oko duže osnovice. Odrediti površinu i zapreminu nastalog obrtnog tijela.
5. Pacijent je primljen u bolnicu 13. februara u 10 h. Mjerena mu je tjelesna temperatura pet puta dnevno u 6 h, 10 h, 14 h, 18 h i 22 h. Grafikon pokazuje tjelesne temperature pacijenta od trenutka primanja u bolnicu do trenutka otpuštanja iz bolnice.

a) Kog datuma je pacijent otpušten iz bolnice?

b) Kada je pacijentu tjelesna temperatura bila viša od 37,2 stepena on bi popio 5 *ml* sirupa. Koliko je ukupno mililitara sirupa pacijent popio tokom boravka u bolnici?



Marina Laković i Ivana Konatar, JU OŠ „Oktoih“ Podgorica

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Neko je pošao pješice iz mjesta C u mjesto M, čije je rastojanje 765 km. Za koliko će dana stići u mjesto M, ako dnevno za svakih $\frac{3}{10}h$ prelazi $1\frac{2}{7}\ km$, a svakodnevno pješači $10\frac{1}{2}$ časova?
2. U jednoj školi od ukupnog broja svih učenika 28% su odlični. Od broja svih odličnih učenika 80% imaju odličnu ocjenu iz matematike. Odrediti ukupan broj učenika te škole ako odličnu ocjenu iz matematika ima njih 168.
3. Koliko je sada časova ako je do kraja dana ostalo toliko časova koliko iznosi $\frac{5}{7}$ vremena koje je preostalo?
4. Ako je $a = \frac{b}{5} \cdot c$, za koju vrijednost broja c je $b = \frac{1}{2} \cdot a$?

VII razred

1. Konstruisati pravougaonik ako je dužina njegove dijagonale 5 *cm* i zbir dužina dvije susjedne stranice 7 *cm*.

2. Tačke P, Q, R i S pripadaju redom stranicama romba ABCD pri čemu je $BP = BQ = DR = DS$. Dokazati da je četvorougao PQRS pravougaonik.

3. Dijagonale trapeza ABCD, $AB \parallel CD, AB > CD$, dijele srednju liniju trapeza na tri dijela od kojih je jedan jednak zbiru druga dva dijela. Ako je veća osnovica dužine 15 *cm*, kolika je dužina manje osnovice?

4. Riješiti nejednačinu $\left|\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}\right| - m \leq p + \frac{n}{2}$, gdje su m, n i p brojevi za koje važi: $2^m \cdot 3^n \cdot 7^p = 31752$.

VIII razred

1. Visina romba je 7 *cm*, a unutrašnji i njegov susjedni spoljašnji ugao se odnose kao 1 : 3. Izračunati obim i površinu tog romba.
2. Rješenje jednačine je dužina visine jednakostraničnog trougla izražene u *cm*:
$$(h-1)^2 + (h+2)^2 = (h-1)(h+1) + 2h + 18.$$
Odrediti površinu, poluprečnik upisane i poluprečnik opisane kružnice.
3. Površina jednakokrakog trapeza je $36\ cm^2$, visina je 2 *cm*, a dužine paralelnih stranica se odnose kao 5 : 4. Odrediti dužinu srednje linije trapeza, obim i uglove na većoj osnovici.
4. Neka su katete pravouglog trougla 30 *cm* i 40 *cm*. Izračunati odnos obima upisanog i opisanog kruga.

IX razred

1. U pravilnu četvorostranu piramidu je upisana i oko nje opisana kupa iste visine. Dokazati da je odnos zapremine upisane i opisane kupe 1 : 2.
2. Osnovice pravoglog trapeza su 14 *cm* i 8 *cm*, a oštar ugao je 60^o. Izračunati zapreminu tijela nastalog rotacijom trapeza oko kraće osnovice.
3. Rješenje sistema su dužine stranica pravougaonika izražene u *cm*.
$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{4} + \dfrac{2a-b}{2} = \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{2a-3}{3} + \dfrac{a-2b}{5} = -\dfrac{7}{15} \end{cases}$$
Izračunati zapreminu tijela nastalog rotiranjem pravougaonika oko duže stranice.

4. Koliko se materijala utroši za fudbalsku loptu poluprečnika 10 cm ako na šavove treba dodati 8% površine lopte?

TAKMIČARSKI ZADACI

VI razred

1. Umjesto zvjezdica staviti znake računskih operacija tako da dobijete tačnu jednakost (mogu se koristiti i zagrade):

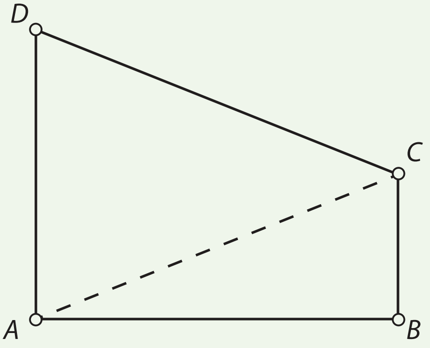
$$\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6072} = 2024.$$

2. U jednoj korpi nalaze se crvene, a u drugoj bijele ruže. Broj crvenih jednak je $\frac{7}{8}$ broja bijelih ruža. Ako se 7 bijelih ruža premjesti u korpu sa crvenim ružama, u korpama će biti isti broj ruža. Koliko ima crvenih ruža?

VII razred

1. U svakoj klupi u jednom razredu sjede najviše dva učenika. Poznato je da $\frac{2}{3}$ ukupnog broja dječaka sjedi u klupama sa $\frac{3}{5}$ ukupnog broja djevojčica. Koji dio učenika sjedi u paru dječak-djevojčica?

2. Na slici je dat četvorougao (pravougli trapez) tako da je: $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC = 90°$ i AD = 2BC. Dokazati da je AC = CD.



VIII razred

1. Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla je 20 cm, a visina koja odgovara kraku je 24 cm. Odrediti obim trougla.

2. Dijagonala jednakokrakog trapeza dužine 10 cm obrazuje sa dužom osnovicom ugao od 45°. Izračunati površinu tog trapeza.

IX razred

1. Izračunati površinu osnog presjeka jednakostrane kupe u koju je upisana najveća moguća lopta površine $36\pi cm^2$.

2. Jednakostraničan valjak visine 6 *cm* presječen je jednom ravni paralelnoj osi valjka na rastojanju 2 *cm* od ose. Naći površinu presjeka.

Suzana Kovačević i Aleksandra Račić,
JU OŠ „Vuk Karadžić“, Podgorica

RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

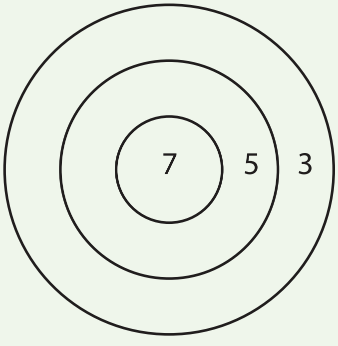
VI razred

1. Svi prirodni brojevi od 1 do 2013 napisani su u jednom redu, od najmanjeg do najvećeg. Da li je moguće dodati znakove + i − između njih tako da se dobije rezultat koji je jednak 0?

Rješenje:

Zbir $1+2+3+\ldots+2013=\frac{2013\cdot 2014}{2}=2013\cdot 1007$ očito je neparan broj. Dalje, kako se zamjenom bilo kojeg znaka + znakom − ne mijenja parnost ovog zbira, kako god rasporedili ova dva znaka između zadatih brojeva, uvijek ćemo dobiti kao rezultat neparan broj. Kako je nula paran broj, zaključujemo da je nije moguće dobiti kao konačan rezultat.

2. Dječak gađa metu i za svoje pogotke dobija poene naznačene na slici. Ako je gađao metu 6 puta, koji je jedini broj poena koje je mogao ostvariti: 16, 36, 19 ili 41?



Rješenje:

Pretpostavimo da je dječak a puta pogodio oblast od 7 poena, b puta oblast od 5 poena i c puta oblast koja mu donosi 3 poena. Tada je $a + b + c = 6$.

Ukupan broj poena biće jednak: $7a + 5b + 3c$.

Ako je $a = 5$, tada je b ili c jednako 0. U oba slučaja dobijamo: $35 + 5 = 40$ ili $35 + 3 = 38$. Ovi brojevi se ne nalaze na listi ponuđenih poena u postavci. Dalje, ako je $a = 4$, tada je: $b + c = 2$, pa su moguće tri situacije.

Ako je $b = 0$ i $c = 2$ imamo da je ukupno ostvario $28 + 0 + 6 = 34$ poena. Ako je $b = 2$ i $c = 0$ dobijamo da je ukupno ostvario $28 + 10 + 0 = 38$ poena. Ako je $b = 1$ i $c = 1$ dobijamo da je ukupno ostvario $28 + 5 + 3 = 36$ poena.

Obzirom da je u zadatku rečeno da je tačno jedan broj od ponuđenih moguće rješenje, ovdje se zaustavljamo. Dakle, od navedenih brojeva, jedino je moguće da je ostvario 36 poena.

VII razred

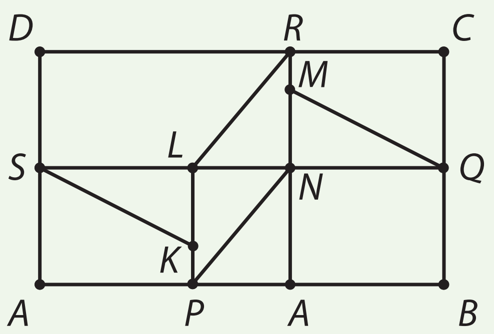
1. U zbiru $3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots + 3333333\ldots + \ldots$ koji se sastoji od 2015 sabiraka, odrediti broj koji se dobija kada izdvojimo četiri poslednje cifre dobijenog zbira.

Rješenje:

Kako nas interesuju samo posljednje četiri cifre, dovoljno je sabrati prva tri člana zbira i četvorocifrene završetke preostalih članova.

Dakle imamo: $3 + 33 + 333 + 3333 + 3333 + 3333 + \ldots + 3333$, gdje je ukupno 2015 članova. Kako se sabirak 3333 pojavljuje 2012 puta, dati zbir je jednak: $2012 \cdot 3333 + 369 = 6706365$, pa je traženi broj 6365.

2. Na slici pored, dat je pravougaonik $ABCD$ sa stranicama 32 cm i 24 cm. Trouglovi SKL, PLN, QNM, RNL su podudarni pravougli trouglovi. Odrediti površinu svakog od njih.



Rješenje:

Tačke S, L, N, Q su kolinearne.

Neka je $LN = LK = NM = x$. Tada je:

$SL = QN = \frac{32-x}{2} = 16 - \frac{x}{2} = PL = RN$. Kako je $PL + RN = AD = 24$, to je $x = 8$.

Dakle, stranice trougla su 8 cm i 12 cm, odakle dobijamo da je površina svakog od trouglova $\frac{8 \cdot 12}{2} = 48$.

VIII razred

1. Neka je $a + b + c = 0$, gdje su a, b, c realni brojevi različiti od nule. Odrediti vrijednost izraza:

$$(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ac)(c^2 - ab).$$

Rješenje:

Koristeći da je $a + b + c = 0$, odnosno $a = -b - c$, imamo da je:

$A = (a^2 - bc)^2 = ((b + c)^2 - bc)^2 = (b^2 + c^2 + bc)^2$

Dalje je:

$B = (b^2 - ac)(c^2 - ab) = \left(b^2 + c(b + c)\right)\left(c^2 + b(b + c)\right) =$

$(b^2 + c^2 + bc)^2$.

Sada se jasno vidi da je traženi izraz $A + B = 0$.

2. Maša je napisala dvocifren broj. Cifri desetica je dodala 5, a oduzela je 3 od cifre jedinica. Dobila je broj koji je dva puta veći od prvobitno napisanog. Koji broj je napisala u početku?

Rješenje:

Neka je $\overline{xy} = 10x + y$ traženi broj. Na osnovu teksta zadatka imamo:

$2(10x + y) = 10(x + 5) + (y - 3)$, odakle se dobija:

$20x + 2y = 10x + 50 + y - 3$.

Sređivanjem prethodne jednačine dobijamo $10x + y = 47$. Odavde je jasno da je $x = 4$ i $y = 7$ jedina mogućnost.

Dakle, traženi broj je 47.

IX razred

1.Ako je $(10^{2024}+25)^2-(10^{2024}-25)^2=(\sqrt{10})^n$, odrediti vrijednost n.

Rješenje:

Kako je $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, to je:

$$\left(10^{2024}+25\right)^2-\left(10^{2024}-25\right)^2=4\cdot 10^{2024}\cdot 25$$

$$=100\cdot 10^{2024}=10^{2026}.$$

Izjednačavanjem dobijamo $10^{2026}=\left(\sqrt{10}\right)^n$ i kvadriranjem obije strane dobija se da je: $\left(10^{2026}\right)^2=10^n$, odakle je $n=4052$.

2. Odrediti koliko je različitih prirodnih brojeva n, za koje je n^2-440, potpun kvadrat.

Rješenje:

Ako je $n^2-440=m^2$, lako se dobija da je $(n-m)(n+m)=440$.

Kako je $m+n+m-n=2n$, zbir brojeva $m+n$ i $m-n$ je paran. To znači da su ili oba parna ili oba neparna broja. Kako je 440 paran broj, to $m+n$ i $m-n$ moraju biti oba parna broja.

U tabeli su date moguće kombinacije:

$n-m$	$n+m$	n	n^2-440
2	220	111	$11881=109^2$
4	110	57	$2809=53^2$
10	44	27	$289=17^2$
20	22	21	$1=1^2$

Dakle, odgovor je 4.

Seid Kršić, JU OŠ „21. maj“ Podgorica

PRIPREMA ZA ČAS

Predmet:	Matematika
Razred:	VII
Nastavnik:	Slaviša Zeković
Oblast:	Kombinatorika – pravilo množenja
Ishodi učenja:	***Na kraju učenja učenik će biti u stanju da*** *prepozna kombinatorne zadatke i za njihovo rješavanje primjenjuje pravilo proizvoda.*
Obrazovno-vaspitni ishod:	<u>Učenici treba da:</u> - U jednostavnim zadacima sa višecifrenim brojevima određuju posebno za svaku cifru koliko mogućnosti postoji, a onda koriste pravilo proizvoda; - U najprostijim kombinatornim zadacima nabrajaju sve moguće rasporede, trudeći se da nađu sistem kako ne bi preskočili neko rješenje; - Otkrivaju da je kod nekih kombinatornih zadataka broj mogućih razmještaja objekata toliko veliki da ne može biti govora o njihovom nabrajanju i onda samo određuju koliko rješenja postoji; - Prepoznaju kombinatorne zadatke koji se rješavaju primjenom tzv. **pravila proizvoda**; - Rješavaju različite tipove zadataka, od najprostijih do tekstualnih koji zahtijevaju primjenu stečenih znanja, u kojima se pojavljuje pravilo proizvoda u novim situacijama, a vezani su za svakodnevni život; - Složenije zadatke rješavaju tako što ih rastave na jednostavnije; - Primjenjuje znanja u novim situacijama i precizno obrazlažu svoj rad.

AKTIVNOSTI UČENIKA

1. korak/aktivnost:

Nastavnik prvo provjerava kako su učenici uradili domaći zadatak i da li je bilo poteškoća u izradi istog. Ako nekome nije bilo nešto jasno, objašnjava. Učenici se dijele u grupe od po pet učenika, tako da budu ravnopravne po njihovom znanju.

Učestvuju u igri „Domine”. Svaka grupa dobija listice na kojima se nalaze zadatak i odgovor. Dvije listice su samo sa zadatkom. Na jednoj je START i od nje se počinje, a na drugoj KRAJ, sa kojom se završava igra. Grupe rješavajući zadatke, nadovezuju jednu po jednu dominu. Pobjednik je grupa koja prva sastavi domine i dođe do KRAJA

2. korak/aktivnost:

Učenici unutar grupe sarađuju, uključujući svakog člana grupe, rješavaju dobijene zadatatke, uz konstantan nadzor nastavnika.

Nakon izrade, nastavnik prikazuje rješenja na projektoru. Grupa koja je pobijedila izlaže zadatke, ukazujući drugima na eventualne greške ili nejasnoće, a članovi drugih grupa prate.

Radeći zadatke, diskutujući rješenja, učenici obnavljaju pravilo proizvoda, primjenjuju ga u različitim situacijama, što u krajnjem ima za cilj i razumijevanje uloge i značaja kombinatorike.

3. korak/aktivnost:

Učenici bilježe u sveskama domaći zadatak, komentarišu i ocjenjuju rad na času.

Domaći zadatak:

1. *Koliko ima petocifrenih brojeva koji se završavaju sa dvije devetke?*
2. *Koliko ima trocifrenih brojeva u čijem se dekadnom zapisu ne pojavljuju cifre 0 i 7?*
3. *Lazar je zaboravio dvije poslednje cifre Markovog broja telefona. Ako bi Lazar nasumice birao poslednje cifre, koliki je maksimalni broj ljudi koji bi mu odgovorili da je okrenuo pogrešan broj?*

OSVRT NA REALIZACIJU

Listice za igru Domine

START	Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji počinju sa dvije iste parne cifre, a završavaju se sa dvije iste neparne cifre?
20	Na klupi za rezerve sjedi 5 fudbalera, a u igri ih je 11. Trener želi da napravi jednu izmjenu. Na koliko načina trener može izabrati dva fudbalera, jednog kojeg će uvesti u igru i jednog kojeg će izvesti iz igre?
55	Na koliko se načina može razmjestiti šest putnika na deset slobodnih sjedišta? Sjedišta su numerisana.
151 200	Na koliko načina Marko, Lazar i Ena mogu stati u red pred kasom u samoposluzi?
6	Koliko ima trocifrenih brojeva kojima su prva i treća cifra parne?
200	Dva druga žele provesti veče tako što će neko vrijeme sjedjeti u kafiću, a zatim poći u bioskop. Na koliko načina mogu napraviti izbor ako su im na raspolaganju osam kafića i četiri bioskopa?
32	Koliko ima trocifrenih brojeva djeljivih sa 5?
180	Odeljenje jednog razreda broji 35 učenika. Oni su međusobno razmijenili fotografije. Koliko je ukupno podijeljeno fotografija?
1190	Na koliko različitih načina mogu da sjednu četiri osobe ako su postavljene četiri stolice?
24	Od 28 akcionara jedne kompanije bira se predsjednik, izvršni direktor i sekretar. Na koliko načina se može izvršiti ovaj izbor?
19 656	**KRAJ**

Slaviša Zeković, JU OŠ „Štampar Makarije“, Podgorica

MEĐUŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

Prvo Međuškolsko takmičenje učenika osnovnih škola sa teritorije Glavnog grada, u organizaciji Udruženja nastavnika matematike, održano je 10. februara u školi „Novka Ubović”.

Takmičenje je održano u 4 kategorije (VI, VII, VIII i IX razred) sa prijavljenih 112 učenika iz 15 podgoričkih osnovnih škola.

Nijesmo slučajno odabrali školu koja je bila domaćin takmičenja, a čija vrata nam je direktorica Ljiljana Ražnatović otvorila s osmijehom.

„Novka Ubović ime je profesorice koja je proslavila mnoge đake takmičenjima, sa kojih su se vratili ruku ispunjenih nagradama. Bila je poštovana, voljena i sa jasnim stavom, pregalac u svom poslu i učitelj mnogima koji se danas bavimo matematikom”, naveo je u govoru, predsjednik Udruženja nastavnika matematike, profesor Milan Rosandić.

„Znanje se dijeli množenjem, zato danas podijelite svoje znanje, ne strahujući kakav će ishod biti, jer ćemo samo tako pokazati da neustrašivi možemo osvojiti svijet. Osvojiti ga znanjem, jer to je jedino što ostaje vječno i što nam ne može biti oduzeto. Ne može matematičar biti dovoljno dobar, ako pomalo nije i pjesnik. Danas ste ovdje, jer ste na putu da postanete veliki matematičari, a to je ovom gradu i ovoj državi prijeko potrebno. Zato se ne plašite da uz pjesmu rješavate zadatke, osmijehom prebrodite strah i računate na bolje sjutra”, dodao je predsjednik, koji je poželio sreću takmičarima, sa željom da se iduće godine sretnemo u još većem broju.

Organizacioni odbor takmičenja su činili: Ljiljana Marković, Mirjana Bošković, Danijela Jovanović, Nevena Šaranović, Irena Pavićević, Seid Kršić i Dušan Stamatović.

Zahvalnost dugujemo našim sponzorima: preduzeću Domen doo i gospodinu Predragu Lešiću, direktoru, kao i firmama Multikom i Idea, Lovćen banci, Wireless.me, Zavodu za udžbenike i nastavna sredstva i gospodinu Radenku Vojinoviću, koji su nam pružili finansijsku pomoć i podršku.

Hvala direktoru Ispitnog centra Milošu Triviću i njegovim saradnicama Tatjani Vujošević i Milanki Izgarević, kao i direktorici Zavoda za školstvo Rabi Hodžić i njenim saradnicama Nataši Vlahović i Gordani Tmušić Radulović, Aleksandri Hajduković - direktorici Zavoda za udžbenike i nastavna sredstva i uredniku Lazu Lekoviću, na vremenu koje su odvojili da ovo otvaranje uveličaju svojim prisustvom i budu nam podrška.

Drugarima iz škole „Novka Ubović”, koji su uljepšali program zanimljivim tačkama i svim takmičarima i njihovim mentorima, takođe dugujemo zahvalnost.

Započeli smo jednu lijepu matematičku priču iza koje umjesto tačke, stavljamo zarez jer želimo da se sve nastavi i da se matematika slavi uz ljubav!

Ponosni smo na naše takmičare i njihove mentore i to:

VI razred

1. mjesto: **Tadej Joksimović**, OŠ „Vladimir Nazor” mentor Nevena Šaranović;
2. mjesto: **Tijana Bokun**, OŠ „21.maj” – mentor Ana Kljajević;
3. mjesto: **Isidora Sredanović**, OŠ „21.maj” – mentor Ana Kljajević.

VII razred

1. mjesto: **Lana Vukić**, OŠ „21.maj” – mentor Jelena Ostojić;
2. mjesto: **Uroš Grba**, OŠ „Oktoih” – mentor Vladan Bošković;
3. mjesto: **Mišo Đurović**, OŠ „Pavle Rovinski” – mentor Zorka Ćetković.

VIII razred

1. mjesto: **Teodora Đonović**, OŠ „Štampar Makarije” mentor Anđela Jovanović;
2. mjesto: **Marko Ćetković**, OŠ „Sutjeska” – mentor Sanda Ivanović;
3. mjesto: **Jana Marković**, OŠ „Sutjeska” – mentor Milica Leovac.

IX razred

1. mjesto: **Boris Veliki**, OŠ „Novka Ubović” – mentor Vuk Leković;
2. mjesto: **Aleksandar Rnković**, OŠ „Oktoih” mentor Vanja Đurđić Kuzmanović;
3. mjesto: **Dajana Međedović**, OŠ „Radojica Perović” mentor Dubravka Lekić.

Najbolje plasiranim učenicima dodijeljeni su: pametni satovi (I mjesto), bluetooth slušalice (II mjesto) i bluetooth zvučnici (III mjesto).

Učesnicima takmičenja koji su osvojili iznad 50 poena, dodijeljene su diplome za zapaženi rezultat, a škole koje su delegirale učenike, dobile su zahvalnice.

Draga djeco, letite na krilima mašte, otvarajte svoje vidike i trudite se da ostanete dobri ljudi i da se ne plašite izazova. Shvatajte ih kao rebuse i kroz igru osvajajte svijet znanjem, dobrotom i poštenjem.

Slušajte svoje nastavnike i od njih pokupite sve ono dobro, jer svaki nastavnik smatra sebe uspješnim, ako ga nadmaši učenik, a vi ste pokazali da možete. Zato, hrabro naprijed!

Nadamo se da će ovakav entuzijazam pratiti naše đake i dalje, da će matematika probuditi ljubav i da se već iduće godine srijećemo na takmičenju, u još većem broju.

A vi, drage kolege, i dalje oblikujte ove mlade ljude i ubijedite ih da vjeruju u onu staru da je „matematika kraljica među naukama!”

Milan Rosandić, JU OŠ „21. maj“, Podgorica

MEĐUNARODNI DAN MATEMATIKE I DAN BROJA PI (π) 14. MART

Matematika je prisutna u našem svakodnevnom životu. Koliko god matematika izgledala dosadno, ona je značajna za obrazovanje i za naš život uopšte, jer nam pomaže da imamo analitičko razmišljanje, razvija sposobnost razmišljanja. Matematika promoviše mudrost, ubrzava naš um. Takođe, matematika je od suštinskog značaja u svijetu stalnih promjena. Zajedno s algoritmima, matematika igra ključnu ulogu u vještačkoj inteligenciji.

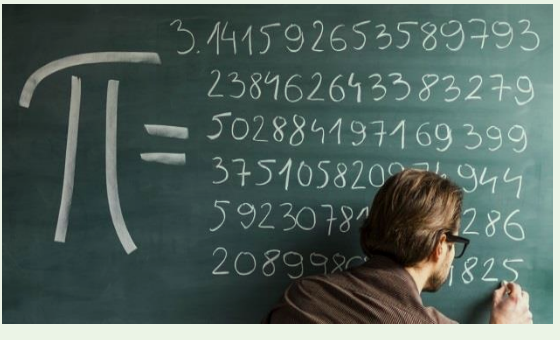
Dan matematike ima za cilj podizanje svijesti o važnosti matematike i njenoj ulozi u oblikovanju našeg svijeta, kao i promociju ljepote i važnosti matematike široj publici. Dan se obilježava sa ciljem da popularise matematiku, kao nauku koja je odigrala značajnu ulogu u razvoju civilizacije.

Prvi zvanično obilježen Dan broja Pi bio je 14. marta 1988. godine u San Francisku, a organizovao ga je Leri Šou u istraživačkoj laboratoriji „Exploratorijum“, u kojoj je radio kao fizičar. Sa svojim kolegama šetao je kružnom dvoranom u muzeju, nakon čega su jeli voćne torte. Kasnijih godina su jeli i pite (engleski pie čiji je izgovor sličan izgovoru ovog broja), a jedino što je bilo bitno pri odabiru jela jeste da je porcija okruglog oblika.

Kongres SAD usvojio je 11 godina kasnije, 2009. godine, rezoluciju kojom je Dan broja Pi postao zvanični praznik. Četrdeseta Generalna skupština UNESCO-a je u novembru 2019. godine proglasila 14. mart kao međunarodni dan matematike.

Četrnaesti mart je svjetski dan matematike iz očiglednog razloga. U nekim zemljama najprije se piše mjesec, a potom dan, pa je danas tako 3/14. Osim toga na današnji dan 1879. godine rođen je Albert Ajnštajn, jedan od najvećih fizičara svih vremena.

Pi je matematička konstanta, odnosno broj, danas široko korišten u matematici, fizici, inženjerstvu, statistici, astronomiji... Definiše se kao odnos obima i prečnika kruga. Pi je, takođe, poznat i kao Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj. π (Pi) je prvo slovo riječi *perimetros* što na grčkom jeziku znači „mjeriti okolo“. Iako je poznato da Pi postoji već 4000 godina i koristili su ga još u starom Egiptu, tek je 1706. godine grčko slovo π odabrano kao simbol ovog broja i prvi ga je uveo Vilijam Džouns, ali je tek u potpunosti prihvaćen nakon usvajanja od strane Leonarda Ojlera.



Arhimed je prvi izračunao broj Pi, ali ga je izrazio kao razlomak, jer u to vrijeme nije bilo decimalnog zapisa. Arhimed je toliko bio zauzet svojim radom o broju Pi da nije primijetio da su rimski vojnici zauzeli Sirakuzu, grad u kojem je živio. Sledeći koji se precizno bavio brojem Pi bio je Ludolf van Cojlen koji je većinu svog života proveo izračunavajući broj i tako stigao do 35. decimale. Zbog toga se taj broj naziva ***Ludolfov broj***. Legenda kaže da su mu na nadgrobnu ploču, nakon što je umro, uklesali broj s 35 decimalnih cifara. Vilijam Šenks je 1874. godine objelodanio da je izračunao 707 decimala broja Pi. Njegov rad bio je izložen u Palati otkrića u Parizu, međutim 73 godine kasnije otkriveno je da je vrijednost 528. decimale netačna te je ostatak cifara obrisan i ponovo uklesan.

Mnogi matematičari su pokušali da broj Pi izračunaju do poslednje decimale, sve dok nije shvaćeno da je to nemoguće zbog njegove beskonačnosti. Pojavom računara, mnoge matematičke nedoumice pale su u drugi plan, ali broj Pi i dalje drži pažnju svjetskih naučnika.

U prvih sto hiljada decimala broja Pi najčešće se ponavlja broj jedan.

Ginisov svjetski rekord u broju zapamćenih decimala broja Pi postavio je 21-godišnji Rajveer Meena, student Univerziteta VIT u indijskom Velloreu, pamteći 70000 cifara broja Pi. To je izuzetan podvig – trebalo mu je skoro 10 sati da izgovori sve cifre.

Prvom računaru iz 1949. trebalo je 70 sati da otkrije prvih dvije hiljade decimalnih mjesta broja Pi.

Rekord otkrivanja najviše decimala broja Pi drže naučnici švajcarskog Graubuenden univerziteta primijenjene nauke, koji su za 108 dana koliko im je bilo potrebno, izračunali 62,8 triliona cifara korišćenjem super-kompjutera. Ove cifre su izračunate skoro 3,5 puta brže nego što je to bilo sa poslednjim svjetskim rekordom iz 2020. godine u kojem je izračunato 50 triliona cifara.

Broj Pi je svuda oko nas: od Ajštajnove teorije relativiteta, preko korekcija vaših GPS koordinata, do najrazličitijih problema u elektronici. Važan je za Furijevu transformaciju koja se koristi za kompresovanje podataka. Sretamo ga i u fizici - u formuli temeljnog zakona kvantne fizike, u trećem Keplerovom zakonu koji nam objašnjava period okretanja planete oko Sunca. Tim švajcarskih naučnika koji su postavili rekord u izračunavanju, kaže da će iskustvo koje su stekli izračunavajući broj Pi moći da primijene u drugim oblastima, kao što su „analiza RNK, simulacije dinamike fluida i tekstualne analize“. Između ostalog, NASA broj Pi koristi i za izračunavanje veličine padobrana potrebnog za slanje rovera na površinu Marsa. Inženjeri u NASA zaokružuju ovaj broj na „samo“ 15 decimala kada se bave računanjem međuplanetarnih putanja.

Za piramide u Gizi ovdje su interesantne dvije stvari. Prva je ta da odnos između visine i obima piramide odgovara odnosu između prečnika i obima kruga. Druga je: ako se osnova površine piramide podijeli dvostrukom polovinom piramide, dobija se približna vrijednost broja Pi.

Michael Blake je pretvorio decimalne cifre u note, te tako broj Pi pretvorio u muziku.

Širom svijeta, 14. marta se organizuju brojni događaji i aktivnosti kojima se obilježava slavni simbol. Neke od ovih aktivnosti su i „zapamtiti što više decimala broja Pi“.

Milena Lješnjak, JU OŠ „Marko Miljanov“, Bijelo Polje

REDAKCIJA ČASOPISA JE ODLUČILA DA SA PO 10 PRIMJERAKA DIJAGONALE 24 NAGRADI ŠKOLE ČIJI SU UČENICI BILI NAJREDOVNIJI U RUBRICI „NAGRADNI ZADATAK"

- JU OŠ „Vuk Karadžić", Berane
- JU OŠ „Milan Vukotić", Zeta
- JU OŠ „Olga Golović", Nikšić
- JU OŠ „Radojica Perović", Podgorica
- JU OŠ „Marko Miljanov", Bijelo Polje

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.

Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**" i „**Narodnoj knjizi**".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **510-206991-61** kod CKB banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcg.wordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >